Prof. Dr. M. Rapoport
Dr. U. Görtz **WS 2003/04**

Lineare Algebra I

Präsenzaufgaben, Teil 5

Aufgabe 5

Seien $U_1, \ldots, U_n$ $(n \geq 1)$ endlich-dimensionale Unterräume eines Vektorraums V. Zeige:

$$\dim U_1 + \cdots + U_n = \sum_{i=1}^{n} \dim U_i - \sum_{i=2}^{n} \dim(U_1 + \cdots + U_{i-1}) \cap U_i.$$

Aufgabe 6

Seien m und n natürliche Zahlen, A eine $m \times m$-Matrix, B eine $m \times n$-Matrix und C eine $n \times n$-Matrix über dem Körper K. Es sei $D = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$. Zeige:

a) $\operatorname{rg} D \geq \operatorname{rg} A + \operatorname{rg} C$

b) Wenn $\operatorname{rg} C = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix}$ gilt, so gilt in a) Gleichheit.

c) Gilt auch die Umkehrung von b)?

Aufgabe 7

Zeige, dass der Rang einer Matrix gleich dem Maximum der Ränge aller quadratischen Untermatrizen ist.

Aufgabe 8

Welche der folgenden Abbildungen $f\colon K^3 \longrightarrow K^2$ sind linear?

a)

$$K = \mathbb{Q}, \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 4x + z \\ y \end{pmatrix}$$

b)

$$K = \mathbb{F}_2, \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + y \\ y + z \end{pmatrix}$$

c)

$$K = \mathbb{Q}, \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y^2 \\ x \end{pmatrix}$$

d)

$$K = \mathbb{F}_2, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y^2 \\ x \end{pmatrix}$$

Aufgabe 9

a) Sei K ein Körper, seien V, W endlich-dimensionale K-Vektorräume, und seien $f, g\colon V \longrightarrow W$ lineare Abbildungen mit $V = \ker f + \ker g$, $W = \operatorname{im} f + \operatorname{im} g$. Zeige, dass $f + g$ surjektiv ist.

b) Zeige anhand eines Beispiels, dass im allgemeinen die Summe zweier surjektiver linearer Abbildungen nicht surjektiv ist.