Prof. Dr. M. Rapoport
Dr. U. Görtz **WS 2003/04**

Lineare Algebra I

Präsenzaufgaben, Teil 4

Aufgabe 5

Sei $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Wir fassen die Potenzmenge $\mathbb{P}(M)$ von M wie in Aufgabe 3, Blatt 3, als $\mathbb{F}_2$-Vektorraum auf.

a) Berechne sämtliche Linearkombinationen der folgenden Vektoren in $\mathbb{P}(M)$:

$$a = \{1, 6, 7\},\ b = \{2, 5, 7\},\ c = \{3, 5, 6\},\ d = \{4, 5, 6, 7\}.$$

Sind diese vier Vektoren linear unabhängig?

b) Gib eine Basis von $\mathbb{P}(M)$ an.

Aufgabe 6

Für welche natürlichen Zahlen $n \geq 2$ bilden die $n+1$ Polynome $p_1(x) = x+1$, $p_2(x) = x^2 + x$, $p_3(x) = x^3 + x^2$, $\ldots$, $p_n(x) = x^n + x^{n-1}$ und $p_{n+1}(x) = 1 + x^n$ eine linear unabhängige Teilmenge des Vektorraums aller Polynome mit reellen Koeffizienten?

Aufgabe 7

Sei K ein Körper, und V ein K-Vektorraum. Seien $a_i \in K$, $v_i \in V$, $i = 1, 2, 3$. Es gelte $a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 = 0$, $a_1, a_3 \neq 0$. Zeige, dass $\langle v_1, v_2 \rangle = \langle v_2, v_3 \rangle$.

Aufgabe 8

Sei $n \geq 2$ eine natürliche Zahl, und sei K ein Körper. Sei U der folgende Untervektorraum von K^n:

$$U = \{(x_1, \ldots, x_n) \in K^n;\ x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0\}.$$

Zeige, dass die Elemente

$$e_1 = (1, -1, 0, \ldots, 0),\ e_2 = (0, 1, -1, 0, \ldots, 0),\ e_3 = (0, 0, 1, -1, 0, \ldots, 0),\ e_n = (0, \ldots, 0, 1, -1)$$

eine Basis von U bilden. Schreibe ein beliebiges Element $(x_1, \ldots, x_n) \in U$ als Linearkombination der e_i.

Aufgabe 9

Sei V ein Vektorraum über einem Körper K. Seien $A, B \subseteq V$. Beweise oder widerlege:

a) $\langle A \cap B \rangle \subseteq \langle A \rangle \cap \langle B \rangle$

b) $\langle A \cap B \rangle \supseteq \langle A \rangle \cap \langle B \rangle$

c) $\langle \langle A \rangle \cap \langle B \rangle \rangle = \langle A \rangle \cap \langle B \rangle$

d) $\langle A \cup B \rangle = \langle A \rangle + \langle B \rangle$

Aufgabe 10

Es sei $V = \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller Abbildungen $f \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Bezeichne P die Menge aller polynomialen Abbildungen $f \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ ($n \in \mathbb{N}$, $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$). Beweise:

a) Die Menge P ist ein Untervektorraum von V.

b) Der Untervektorraum P ist nicht endlich erzeugt.

Aufgabe 11

Gib einen Vektorraum V und eine unendliche Teilmenge $M \subseteq V$ an, so dass gilt:

a) Verschiedene $x, y \in M$ sind stets linear unabhängig.

b) Drei Elemente $x, y, z \in M$ sind stets linear abhängig.