Prof. Dr. M. Rapoport
Dr. U. Görtz **WS 2003/04**

Lineare Algebra I

Präsenzaufgaben, Teil 3

Aufgabe 5

Sei $F = \{0, 1, u\}$ eine dreielementige Menge. Zeige in den folgenden Schritten, dass es genau eine Möglichkeit gibt, auf F die Struktur eines Körpers zu erklären, so dass 0 das neutrale Element der Addition und 1 das neutrale Element der Multiplikation ist.

a) Es muss $u = 1 + 1 = -1$ in F gelten.

b) Stelle die Additions- und Multiplikationstafeln von F auf und begründe, dass dies nur auf eine Weise möglich ist.

c) Gib eine surjektive Abbildung $f\colon \mathbb{Z} \longrightarrow F$ an, für die $f(a + b) = f(a) + f(b)$ und $f(ab) = f(a)f(b)$ gilt. Folgere daraus die Gültigkeit der Assoziativgesetze und des Distributivgesetzes in F.

Aufgabe 6

Zeige, dass $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{x \in \mathbb{R};\ \text{es gibt } a, b \in \mathbb{Q} \text{ mit } x = a + b\sqrt{2}\}$ mit der Addition und Multiplikation reeller Zahlen ein Körper ist.

Aufgabe 7

Sei K ein Körper.

a) Bestimme alle Unterräume des K-Vektorraums K.

b) Bestimme alle Unterräume des K-Vektorraums K^2.

Aufgabe 8

Erzeugen die folgenden Vektoren den Vektorraum $\mathbb{Q}^3$?

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 9

Sei K ein Körper. Gibt es einen Vektor $x \in K^2$, der den Vektorraum K^2 erzeugt?

Aufgabe 10

Betrachte ein lineares Gleichungssystem in n Unbekannten mit rationalen Koeffizienten. Gibt es Unterschiede hinsichtlich der Lösbarkeit, je nachdem, ob man Lösungen in $\mathbb{Q}$ oder in $\mathbb{R}$ sucht? Konkreter:

a) Besitzt das System eine nichttriviale Lösung in $\mathbb{Q}^n$, wenn es homogen ist und in $\mathbb{R}^n$ eine nichttriviale Lösung besitzt?

b) Nun sei das System nicht notwendig homogen und in $\mathbb{R}$ eindeutig lösbar. Liegt die Lösung in $\mathbb{Q}^n$?