Prof. Dr. M. Rapoport
Dr. U. Görtz **WS 2003/04**

Lineare Algebra I

Präsenzaufgaben, Teil 12

Aufgabe 5

Sei K ein Körper und V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum. Seien f und g Endomorphismen von V mit $f \circ f = f$ und $g \circ g = \mathrm{id}_V$.

a) Bestimme, welche Elemente von K als Eigenwerte von f bzw. g auftreten können.

b) Zeige: die Abbildung f ist diagonalisierbar.

c) Nun gelte $1 + 1 \neq 0$ in K. Zeige, dass dann g diagonalisierbar ist. Zeige, dass die Zusatzvoraussetzung tatsächlich notwendig ist.

Aufgabe 6

Sei $A \in M_2(\mathbb{R})$. Zeige:

a) A hat zwei verschiedene reelle Eigenwerte $\iff 4 \det A < (\operatorname{Spur} A)^2 \implies A$ ist diagonalisierbar über $\mathbb{R}$.

b) A hat zwei konjugiert komplexe Eigenwerte $\iff 4 \det A > (\operatorname{Spur} A)^2 \implies A$ ist diagonalisierbar über $\mathbb{C}$.

c) A hat einen reellen Eigenwert $\iff 4 \det A = (\operatorname{Spur} A)^2$. Ist A in diesem Fall diagonalisierbar?

Aufgabe 7

a) Berechne die Eigenvektoren und Eigenwerte der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

b) Wir definieren die Fibonacci-Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch $u_1 = u_2 = 1$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ für $n \geq 1$. Für die Matrix A aus Teil a) gilt also:

$$\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix},$$

folglich

$$\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Schreibe $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ als Linearkombination von Eigenvektoren und berechne damit $\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$.
Wir erhalten so eine geschlossene Formel für u_n. (*Antwort:* $u_n = \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)\frac{1}{\sqrt{5}}$.)