Prof. Dr. M. Rapoport **WS 2003/04**
Dr. U. Görtz

Lineare Algebra I

Präsenzaufgaben, Teil 11

Aufgabe 5

Sei K ein Körper, $n \geq 1$ eine natürliche Zahl. Bezeichne $E \in M_n(K)$ die Einheitsmatrix.

a) Sei $A \in M_n(K)$ mit $A \cdot {}^tA = E$. Zeige: $\det(A) \in \{1, -1\}$. Insbesondere gilt für $\sigma \in S_n$: $\det(P_\sigma) \in \{1, -1\}$.

b) Zeige, dass die Determinante der in Aufgabe 2, Blatt 10, beschriebenen Matrix nicht davon abhängt, wie man die acht Punkte des Diagramms durchnummeriert.

Aufgabe 6

Sei K ein Körper, $A = (a_{ij}) \in M_{m \times n}(K)$ eine Matrix und $0 \leq r \leq \min(m, n)$. Eine Matrix A' bezeichnet man als $(r \times r)$-Teilmatrix von A, wenn es r-elementige Teilmengen $I \subseteq \{1, \ldots, m\}$ und $J \subseteq \{1, \ldots, n\}$ gibt mit $A' = (a_{ij})_{i \in I, j \in J}$.

Sei r maximal gewählt mit der Eigenschaft, dass es eine $(r \times r)$-Teilmatrix A' von A gibt mit $\det A' \neq 0$. Zeige: $\operatorname{rg} A = r$.

Aufgabe 7

a) Sei $A \in GL_n(\mathbb{Q})$ eine Matrix, deren Einträge sämtlich ganze Zahlen sind. Zeige: Die Einträge von A^{-1} sind genau dann sämtlich ganze Zahlen, wenn $\det(A) \in \{1, -1\}$.

b) Die lineare Abbildung $f\colon \mathbb{Q}^n \longrightarrow \mathbb{Q}^n$ sei durch eine Matrix A mit Einträgen in $\mathbb{Z}$ und mit $1 \leq |\det(A)| \leq 6$ gegeben. Zeige: es gibt genau ein $v \in \mathbb{Z}^n$ mit

$$f(v) = \begin{pmatrix} 60 \\ 60 \\ \vdots \\ 60 \end{pmatrix}.$$

Ergebnis von Aufgabe 4

a) i) $A_1(n) = n!(n-1)$.

ii) $A_2(n) = 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \cdots + (n-1)\binom{n}{n-1} + n = \sum_{i=2}^{n} i\binom{n}{i} = n(2^{n-1}-1)$.

iii) $A_3(n) = n(n-1) + (n-1)(n-2) + \cdots + 2 + n - 1 = \sum_{i=1}^{n}(i^2-i) + n - 1 = \frac{(n-1)(n^2+n+3)}{3}$.

b) i)–iii) $B_i(n) = (n+1)A_i(n) + n$.

iv) $B_4(n) = \sum_{i=1}^{n}(i^2-i) + \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n^2+3n-1)}{3}$.

v) $B_5(n) = A_2(n) + n(\sum_{i=2}^{n} i\binom{n-1}{i-1}) + n = \sum_{i=2}^{n}(i+i^2)\binom{n}{i} + n$.

c) i) Es ist $B_1(25) = 26A_1(25) + 25 = 26! \cdot 24 + 25 = 9678995067038535254016000025 \approx 9.679 \cdot 10^{27}$, also $B_1(25) \cdot 3 \cdot 10^{-19}/(60 \cdot 60 \cdot 24 \cdot 365) \approx 92.08$, die Berechnung wird somit über 92 Jahre lang dauern.

ii) Es ist $B_4(25) = \frac{25(625+75-1)}{3} = 5825$, folglich ist $B_4(25)/3000 \approx 1.94$, die Berechnung wird mithin etwa 2 Sekunden dauern.