Prof. Dr. M. Rapoport
Dr. U. Görtz **WS 2003/04**

Lineare Algebra I

Präsenzaufgaben, Teil 10

Aufgabe 5

a) Sei G eine Gruppe, $h \in G$ ein Element von G. Zeige: die Abbildung $c_h \colon G \longrightarrow G$, $g \mapsto hgh^{-1}$, ist ein Isomorphismus.

b) Sei K ein Körper und $n \geq 2$ eine natürliche Zahl. Die Abbildung $J \colon GL_n(K) \longrightarrow M_n(K)$ sei definiert durch

$$J(A) = {}^t(A^{-1}).$$

Zeige:

i) $J(A) = ({}^tA)^{-1}$.
ii) $J(A) \in GL_n(K)$ für alle $A \in GL_n(K)$.
iii) $J \circ J = \mathrm{id}_{Gl_n(K)}$.
iv) J ist ein Isomorphismus von $GL_n(K)$ auf sich.
v) J bildet $SL_n(K)$ bijektiv auf sich ab.

c) Zeige, dass die Abbildung $J : SL_n(K) \longrightarrow SL_n(K)$ genau dann von der Form c_h mit $h \in SL_n(K)$ ist, wenn $n = 2$ gilt.

Aufgabe 6

Sei K ein Körper und seien $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in K$. Zeige:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ b_1 & a_1 & a_1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ b_1 & b_2 & a_2 & a_2 & \cdots & a_2 \\ b_1 & b_2 & b_3 & a_3 & \cdots & a_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \cdots & a_n \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^{n} (a_i - b_i).$$

Aufgabe 7

Sei K ein Körper, seien x, $a_0, \ldots, a_{n-1} \in K$. Sei

$$A = \begin{pmatrix} x & & & & & -a_0 \\ -1 & x & & & & -a_1 \\ & -1 & x & & & -a_2 \\ & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & -1 & x & -a_{n-2} \\ & & & & -1 & x - a_{n-1} \end{pmatrix} \in M_n(K).$$

Berechne $\det A$.

Aufgabe 8

Sei $n \geq 1$ eine natürliche Zahl, und seien für $1 \leq i, j \leq n$ stetige Funktionen $f_{ij} \colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ gegeben.

a) Zeige, dass die Abbildung

$$I \longrightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto \det \begin{pmatrix} f_{11}(t) & \cdots & f_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ f_{n1}(t) & \cdots & f_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

eine stetige Funktion auf I ist.

b) Seien $a, b, c : (0, \pi) \longrightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Zeige: das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) & t \\ -\sin(t) & \cos(t) & 2t \\ 0 & 0 & \sin(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \\ c(t) \end{pmatrix}$$

hat für alle $t \in (0, \pi)$ eine eindeutige Lösung $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$, und die Funktionen

$$x, y, z \colon (0, \pi) \longrightarrow \mathbb{R}$$

sind stetig.