Lineare Algebra I — Nachklausur

Aufgabe 1

Bestimme die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & & & = & 1 \\ x & & & + & z & = & 1 \\ & & y & + & z & = & 0 \end{array}$$

mit Koeffizienten im Körper K und berechne den Rang der Koeffizientenmatrix, wobei K der folgende Körper ist:

a) $K = \mathbb{Q}$

b) $K = \mathbb{F}_2$

(5 + 5 Punkte)

Aufgabe 2

Sei $U \subseteq \mathbb{Q}^4$ der von den folgenden Vektoren erzeugte Unterraum:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Bestimme die Dimension von U und gib ein homogenes Gleichungssystem über $\mathbb{Q}$ mit möglichst wenigen Gleichungen an, dessen Lösungsmenge U ist.

(15 Punkte)

Aufgabe 3

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -4 & 6 & -12 \\ -2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Q}).$$

a) Berechne das charakteristische Polynom von A.

b) Berechne die Eigenwerte von A in $\mathbb{Q}$.

c) Berechne Basen der Eigenräume von A über $\mathbb{Q}$.

d) Ist A diagonalisierbar über $\mathbb{Q}$? Ist A trigonalisierbar über $\mathbb{Q}$?

(7+2+6+2 Punkte)

Aufgabe 4

a) Zeige, dass die Vektoren

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

eine Basis des $\mathbb{Q}$-Vektorraums $\mathbb{Q}^3$ bilden.

b) Sei $\ell_A\colon \mathbb{Q}^3 \longrightarrow \mathbb{Q}^3$ die durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

gegebene Abbildung. Bestimme die Matrix $c_B^B(\ell_A)$, die diese Abbildung bezüglich der durchnummerierten Basis $B = (b_1, b_2, b_3)$ beschreibt.

(3+12 Punkte)

Aufgabe 5

Sei K ein Körper, $n \geq 1$ und sei $A \in M_{2n}(K)$ von der Form

$$A = \begin{pmatrix} 0_n & 0_n \\ B & 0_n \end{pmatrix}$$

mit $B \in GL_n(K)$. (Hier bezeichnet $0_n \in M_n(K)$ die Nullmatrix.) Zeige, dass A ähnlich ist zur Matrix

$$\begin{pmatrix} C & 0_2 & \cdots & 0_2 \\ 0_2 & C & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0_2 \\ 0_2 & \cdots & 0_2 & C \end{pmatrix},$$

wobei $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(K)$.

(13 Punkte)

Aufgabe 6

Seien K ein Körper, $n \geq 1$ und V ein n-dimensionaler Vektorraum. Sei $f\colon V \longrightarrow V$ eine lineare Abbildung. Beweise:

a) Für alle $i \geq 0$ gilt

$$\operatorname{im} f^{i+1} \subseteq \operatorname{im} f^i \quad \text{und} \quad \ker f^{i+1} \supseteq \ker f^i.$$

b) Gilt $\operatorname{im} f^{j+1} = \operatorname{im} f^j$ für ein $j \geq 0$, so gilt $\operatorname{im} f^{i+1} = \operatorname{im} f^i$ auch für alle $i \geq j$.

c) Gilt $\ker f^{j+1} = \ker f^j$ für ein $j \geq 0$, so gilt $\ker f^{i+1} = \ker f^i$ auch für alle $i \geq j$.

d) Für alle $i \geq n$ gilt $\operatorname{im} f^{i+1} = \operatorname{im} f^i$ und $\ker f^{i+1} = \ker f^i$.

(4+5+5+4 Punkte)

Aufgabe 7

Sei K ein Körper.

a) Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum, und seien $f, g\colon V \longrightarrow V$ lineare Abbildungen, so dass $f \circ g = g \circ f$. Sei $\lambda \in K$. Zeige:

$$g(V(\lambda, f)) \subseteq V(\lambda, f).$$

b) Es sei $n \geq 1$, $b, a_{ij} \in K$ $(1 \leq i < j \leq n)$. Ferner sei

$$A = \begin{pmatrix} b & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & b & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & b & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & b \end{pmatrix} \in M_n(K).$$

Gib ein notwendiges und hinreichendes Kriterium in Termen der Koeffizienten von A dafür an, dass A diagonalisierbar ist (mit Beweis).

(6 + 6 Punkte)