Lineare Algebra I

Lösungsvorschläge zum 14. Übungsblatt

U. Görtz

Aufgabe 1

Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum, und seien f und g Endomorphismen von V mit $f \circ g = g \circ f$. Zeige:

a) Sind f und g diagonalisierbar, so sind sie simultan diagonalisierbar, d. h. es existiert eine Basis B von V, so dass $c_B^B(f)$ und $c_B^B(g)$ Diagonalgestalt haben.

b) Sind f und g trigonalisierbar, so sind sie simultan trigonalisierbar, d. h. es existiert eine Basis B von V, so dass $c_B^B(f)$ und $c_B^B(g)$ obere Dreiecksmatrizen sind.

Zu a) Es ist zu zeigen, dass eine Basis von V existiert, deren Elemente alle zugleich Eigenvektoren von f und von g sind. Ist $\lambda \in K$ ein Eigenwert von f, so gilt für alle $v \in V(\lambda, f)$:

$$f(g(v)) = g(f(v)) = g(\lambda v) = \lambda g(v),$$

das heißt, dass g den Unterraum $V(\lambda, f)$ invariant läßt. Die Abbildung $g|_{V(\lambda,f)} \colon V(\lambda, f) \longrightarrow V(\lambda, f)$ ist dann wieder diagonalisierbar (das kann man zum Beispiel dadurch beweisen, dass man zeigt, dass das Minimalpolynom von $g|_{V(\lambda,f)}$ ein Teiler des Minimalpolynoms von g ist, oder direkt, indem man zeigt, dass wenn immer eine Summe von Eigenvektoren von g zu paarweise verschiedenen Eigenwerten im Unterraum $V(\lambda, f)$ enthalten ist, schon alle einzelnen Eigenvektoren in diesem Unterraum liegen. Siehe Blatt 12, Aufgabe 3).

Es existiert also eine Basis von $V(\lambda, f)$, so dass alle Elemente dieser Basis Eigenvektoren von $g|_{V(\lambda,f)}$ und damit auch von g sind. Als Elemente von $V(\lambda, f)$ sind diese Vektoren natürlich auch Eigenwerte von f. So können wir mit jedem Eigenwert von f verfahren und erhalten schließlich eine Basis von V, die aus simultanen Eigenvektoren von f und g besteht.

Zu b) Sei $\lambda \in K$ ein Eigenwert von f (ein solcher existiert, da f trigonalisierbar ist). Wie in Teil a) zeigt man, dass der Eigenraum $V(\lambda, f)$ dann g-invariant ist. Sei $n = \dim V$, $r = \dim V(\lambda, f)$. Sei $B = (b_1, \dots, b_n)$ eine Basis von V, deren erste r Elemente eine Basis von $V(\lambda, f)$ bilden. Die Matrizen $c_B^B(f)$ und $c_B^B(g)$ haben dann die folgende Form:

$$c_B^B(f) = \begin{pmatrix} \lambda E_r & A_f \\ 0 & C_f \end{pmatrix}, \qquad c_B^B(g) = \begin{pmatrix} D_g & A_g \\ 0 & C_g \end{pmatrix}.$$

Dabei sind $D_g \in M_r(K)$, $A_f, A_g \in M_{r,n-r}$, und $C_f, C_g \in M_{n-r}(K)$. Wir setzen $B' = (b_{r+1}, \dots, b_n)$, $V' := \langle b_{r+1}, \dots, b_n \rangle \subseteq V$. Der Raum V zerlegt sich dann als direkte Summe $V = V(\lambda, f) \oplus V'$ und wir haben eine Projektionsabbildung

$$\pi \colon V \longrightarrow V', \qquad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i \mapsto \sum_{i=r+1}^{n} \alpha_i b_i.$$

(Man beachte jedoch, dass in aller Regel V' nicht f-invariant oder g-invariant sein wird.)

Wir bezeichnen mit f' bzw. g' die folgenden Abbildungen:

$$\begin{aligned} f'\colon V' &\longrightarrow V', & v &\mapsto \pi(f(v)), \\ g'\colon V' &\longrightarrow V', & v &\mapsto \pi(g(v)). \end{aligned}$$

Dann gilt gerade $c^{B'}_{B'}(f') = C_f$, $c^{B'}_{B'}(g') = C_g$. Für die charakteristischen Polynome gilt

$$\begin{aligned} \chi_f &= \chi_{f|_{V(\lambda,f)}} \cdot \chi_{f'} = (X-\lambda)^r \chi_{f'}, \\ \chi_g &= \chi_{g|_{V(\lambda,f)}} \cdot \chi_{g'}. \end{aligned}$$

Da f und g trigonalisierbar sind, zerfallen χ_f und χ_g vollständig in Linearfaktoren; entsprechendes gilt dann für alle Teiler dieser Polynome, und es folgt, dass auch $g|_{V(\lambda,f)}$, f' und g' trigonalisierbar sind ($f|_{V(\lambda,f)}$ wird ja offenbar bezüglich jeder Basis durch die Diagonalmatrix λE_r beschrieben).

Per Induktion finden wir eine Basis $b'_{r+1}, \dots, b'_n$ von V', bezüglich der f' und g' beide durch obere Dreiecksmatrizen beschrieben werden. Sei andererseits $b'_1, \dots, b'_r$ eine Basis von $V(\lambda, f)$ bezüglich derer $g|_{V(\lambda,f)}$ durch eine obere Dreiecksmatrix beschrieben wird. Dann ist $b'_1, \dots, b'_n$ eine Basis von V, und die Matrizen, die f bzw. g bezüglich dieser Matrix beschreiben, sind obere Dreiecksmatrizen.

Aufgabe 2

Setze für $A \in GL_n(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} \chi_A(X) &= \det(X \cdot E_n - A) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0 \in \mathbb{R}[X], \\ \eta_A(X) &= \det(E_n - X \cdot A) = 1 + b_1 X + b_2 X^2 + \cdots + b_n X^n \in \mathbb{R}[X]. \end{aligned}$$

a) Gib Formeln an, mit denen man die a_i aus den b_j (und umgekehrt) berechnen kann.

Sei im folgenden A trigonalisierbar.

b) Zeige, dass eine positive Zahl $c \in \mathbb{R}$ existiert, so dass die Reihe

$$S_A(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \mathrm{Spur}(A^{j+1}) \cdot x^j$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < c$ absolut konvergiert, und für diese x gilt (falls $\eta_A(x) \neq 0$):

$$S_A(x) = -\frac{\eta_A'(x)}{\eta_A(x)}.$$

(Es bezeichne η_A' die Ableitung von η_A nach x.)

c) Leite aus b) eine Formel her, mit der man die a_i $(0 \leq i < n)$ aus den Zahlen $n = \mathrm{Spur}(A^0), \mathrm{Spur}(A^1), \ldots, \mathrm{Spur}(A^n)$ rekursiv berechnen kann.

d) Leite aus b) eine Formel her, mit der man aus den a_i $(0 \leq i < n)$ die Zahlen $\mathrm{Spur}(A^j)$ für alle $j \geq 1$ berechnen kann.

(*Hinweis zu c) und d):* Multipliziere die Gleichung in b) auf beiden Seiten mit $\eta_A(x)$, fasse dann beide Seiten als Potenzreihen in x auf und führe einen Koeffizientenvergleich durch. Benutze dann a).)

Zu a) Für alle $i = 0, \ldots, n-1$ gilt

$$a_i = b_{n-i}.$$

Um dies zu zeigen, rechnen wir wie folgt:

$$\eta_A(X) = \det(E_n - XA) = X^n \det(X^{-1}E_n - A) = X^n \chi_A(X^{-1}),$$

also

$$\begin{aligned} 1 + b_1 X + b_2 X^2 + \cdots + b_n X^n &= X^n(X^{-n} + a_{n-1}X^{-(n-1)} + \cdots + a_1 X^{-1} + a_0) \\ &= 1 + a_{n-1}X + \cdots + a_1 X^{n-1} + a_0 X^n. \end{aligned}$$

Es ist allerdings hier noch zu begründen, warum die obige formale Rechnung Gültigkeit hat (was ist X^{-1}?). Dies läßt sich auf zweierlei Arten tun. Einerseits kann man in der Tat ganz formal den Polynomring erweitern zu einem Körper $K(X) \supseteq K[X]$, in dem dann insbesondere die Unbestimmte X ein Inverses besitzt, und in dem die oben durchgeführte Rechnung 'stattfinden kann'. Um diesen Körper zu konstruieren, kann man analog zur Konstruktion der rationalen Zahlen aus den ganzen Zahlen vorgehen, indem man nämlich die Menge aller

Paare (p, q), $p, q \in K[X]$, $q \neq 0$ betrachtet (die man sich als Brüche $\frac{p}{q}$ vorstellen sollte), und Paare (p, q) und (p', q') identifiziert, wenn $pq' = p'q$ gilt (in Analogie dazu, dass man dieselbe rationale Zahl durch verschiedene Brüche beschreiben kann).

In unserem Kontext (über den reellen Zahlen) kann man aber noch anders argumentieren, indem man alle beteiligten Größen als Funktionen $\mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ auffaßt, und die obige Rechnung für einzelne reelle Zahlen X durchführt. Man kommt dann zu dem Ergebnis, dass die beiden Polynomfunktionen $x \mapsto 1 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n$ und $x \mapsto 1 + a_{n-1} x + \cdots + a_1 x^{n-1} + a_0 x^n$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ denselben Wert haben, und dass folglich diese beiden Polynome die gleichen Koeffizienten haben.

Zu b) Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ die Eigenwerte von A (mit Vielfachheiten). Da A invertierbar ist, sind alle Eigenwerte von 0 verschieden. Sei ohne Einschränkung $|\lambda_1| \geq |\lambda_i|$ für alle i. Es gilt dann

$$\begin{aligned} |\operatorname{Spur}(A^{j+1})| &= \left| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{j+1} \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^{j+1} \\ &\leq n|\lambda_1|^{j+1} \end{aligned}$$

und folglich konvergiert $\sum_{j=0}^{\infty} \operatorname{Spur}(A^{j+1}) x^j$ (sogar absolut) für $x < |\lambda_1|^{-1} =: c$.

Ferner gilt (für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$)

$$\eta_A(x) = x^n \chi_A(x^{-1}) = \prod_{i=1}^{n} (1 - \lambda_i x)$$

(siehe Teil a)), also

$$\eta'_A(x) = \sum_{i=1}^{n} -\lambda_i \prod_{j \neq i} (1 - \lambda_j x)$$

und damit für $|x| < c$:

$$\begin{aligned} -\frac{\eta'_A(x)}{\eta_A(x)} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_i x} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_i^{j+1} x^j \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{j+1} x^j \\ &= S_A(x), \end{aligned}$$

wobei wir zwischendurch für $\frac{1}{1 - \lambda_i x}$ die geometrische Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} \lambda_i^j x^j$ eingesetzt haben (beachte, dass $|\lambda_i x| < 1$).

Zu c) Wir haben wegen b), für $|x| < c$:

$$\begin{aligned} 1 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n \left(\sum_{j \geq 0} \mathrm{Spur}(A^{j+1}) x^j \right) &= \eta_A(x) S_A(x) = -\eta_A'(x) \\ &= -b_1 - 2b_2 x - 3b_3 x^2 - \cdots - n b_n x^{n-1}. \end{aligned}$$

Beide Seiten sind Potenzreihen in x und wir erhalten durch Koeffizientenvergleich:

$$\begin{aligned} b_1 &= -\mathrm{Spur}(A) \\ 2b_2 &= -b_1 \,\mathrm{Spur}(A) - \mathrm{Spur}(A^2) \\ 3b_3 &= -b_2 \,\mathrm{Spur}(A) - b_1 \,\mathrm{Spur}(A^2) - \mathrm{Spur}(A^3), \end{aligned}$$

und allgemein sieht man (mit $b_0 := 1$)

$$b_i = -\frac{1}{i} \sum_{k=0}^{i-1} b_k \,\mathrm{Spur}(A^{k+1}),$$

also

$$\begin{aligned} a_i &= b_{n-i} = -\frac{1}{n-i} \sum_{k=0}^{n-i-1} b_k \,\mathrm{Spur}(A^{k+1}) \\ &= -\frac{1}{n-i} \sum_{k=0}^{n-i-1} a_{n-k} \,\mathrm{Spur}(A^{k+1}). \end{aligned}$$

Zu d) Aus der in Teil c) hergeleiteten Gleichung erhalten wir (wieder durch Koeffizientenvergleich) auch die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} \mathrm{Spur}(A) &= -b_1 \\ \mathrm{Spur}(A^2) &= -2b_2 - b_1 \,\mathrm{Spur}(A) \\ \mathrm{Spur}(A^3) &= -3b_3 - b_2 \,\mathrm{Spur}(A) - b_1 \,\mathrm{Spur}(A^2) \end{aligned}$$

und allgemein (mit $b_k := 0$ für $k > n$) die sogenannte Newtonsche Formel:

$$\mathrm{Spur}(A^j) = -j b_j - \sum_{k=1}^{j-1} b_k \,\mathrm{Spur}(A^{j-k}),$$

die sich für $j > n$ vereinfacht zu

$$\mathrm{Spur}(A^j) = -\sum_{k=1}^{n} b_k \,\mathrm{Spur}(A^{j-k}) = -\sum_{k=1}^{n} a_{n-k} \,\mathrm{Spur}(A^{j-k}).$$

Darüberhinaus gilt für $\mathrm{Spur}(A^j)$ der folgende Ausdruck, in dem nun auf der rechten Seite keine Spuren mehr vorkommen (die nicht eingetragenen Koeffizienten der Matrix sind Null):

$$\mathrm{Spur}(A^j) = \det \begin{pmatrix} -b_1 & 1 & & & & \\ 2b_2 & -b_1 & 1 & & & \\ -3b_3 & b_2 & -b_1 & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ (-1)^{j-1}(j-1)b_{j-1} & (-1)^{j-2}b_{j-2} & \cdots & b_2 & -b_1 & 1 \\ (-1)^j j b_j & (-1)^{j-1}b_{j-1} & \cdots & -b_3 & b_2 & -b_1 \end{pmatrix}.$$

Diese Gleichheit folgt aus den obigen Formeln, wenn man die Determinante nach der letzten Zeile entwickelt.

Bemerkungen. 1. Was in dieser Aufgabe untersucht wurde, ist —ganz unabhängig von dem charakteristischen Polynom bzw. der Spur einer Matrix— der Zusammenhang zwischen den Potenzsummen

$$\lambda_1^k + \cdots + \lambda_n^k$$

und den Werten der sogenannten elementarsymmetrischen Funktionen

$$\lambda_1 + \cdots + \lambda_n,\ \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \cdots + \lambda_{n-1}\lambda_n,\ \ldots,\ \lambda_1 \cdots \lambda_n,$$

(d.h. den Koeffizienten des Polynoms $\prod(X+\lambda_i)$) für $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. (Man beachte allerdings, dass, wenn λ_i die Eigenwerte der Matrix A sind, das charakteristische Polynom die Form $\prod(X - \lambda_i)$ hat, dass also unterschiedliche Vorzeichen auftreten.)

2. Wir haben benutzt, dass die Matrix $A \in GL_n(\mathbb{R})$, von der wir ausgegangen sind, trigonalisierbar ist. Man kann aber zeigen, dass man die Techniken der Differentialrechnung, die wir im Beweis benutzt haben, auf den Körper der komplexen Zahlen verallgemeinern kann, und dass — da jede Matrix in $GL_n(\mathbb{C})$ trigonalisierbar ist — die Formeln, die wir bewiesen haben, für alle invertierbaren Matrizen mit komplexen Einträgen Gültigkeit haben. Darüber hinaus folgt mit einem Stetigkeitsargument, dass die Formeln in Teil c) und Teil d) sogar für alle Matrizen in $M_n(\mathbb{C})$ gelten.

Man beachte aber andererseits, dass wir beispielsweise im Körper $\mathbb{F}_2$, in dem $1 + 1$ nicht invertierbar ist, aus der Gleichung

$$2b_2 = -b_1 \,\mathrm{Spur}(A) - \mathrm{Spur}(A^2)$$

nicht b_2 berechnen können. (Vielmehr sagt diese Gleichung einfach $0 = -b_1 \,\mathrm{Spur}(A) - \mathrm{Spur}(A^2)$.)

Aufgabe 3

Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und $V \neq \{0\}$ ein endlichdimensionaler K-Vektorraum.

a) Seien $\varphi\colon V \longrightarrow V$ und $\psi\colon V \longrightarrow V$ lineare Abbildungen mit $\psi \circ \varphi = 0$, $\varphi \circ \psi = 0$. Zeige, dass eine Gerade (d.h. ein eindimensionaler Unterraum) $L \subseteq V$ existiert, so dass $\varphi(L) \subseteq L$ und $\psi(L) \subseteq L$.

b) Seien $\varphi_i\colon V \longrightarrow V$ und $\psi_i\colon V \longrightarrow V$, $i = 1, 2$, lineare Abbildungen mit $\psi_i \circ \varphi_i = 0$, $\varphi_i \circ \psi_i = 0$, $i = 1, 2$. Zeige: es gibt Geraden $L_i \subseteq V$, $i = 1, 2$, so dass

$$\varphi_1(L_1) \subseteq L_2,\ \psi_1(L_2) \subseteq L_1,\ \varphi_2(L_2) \subseteq L_1,\ \psi_2(L_1) \subseteq L_2.$$

Das läßt sich wie folgt in einem Diagramm veranschaulichen:

$$\begin{tikzcd} L_1 \subseteq V \arrow[r, bend left, "\varphi_1"] \arrow[r, bend right, "\psi_2"'] & V \supseteq L_2 \arrow[l, bend left=15, "\psi_1"'] \arrow[l, bend right=15, "\varphi_2"] \end{tikzcd}$$

Die Geraden L_1 und L_2 sollen dabei unter den eingezeichneten Abbildungen ineinander abgebildet werden.

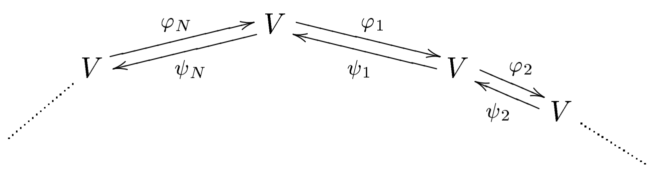
c) Sei nun $N \geq 1$ eine ganze Zahl, seien $\varphi_i\colon V \longrightarrow V$ und $\psi_i\colon V \longrightarrow V$, $i = 1, \ldots, N$, lineare Abbildungen mit

$$\psi_i \circ \varphi_i = 0, \quad \varphi_i \circ \psi_i = 0, \quad i = 1, \ldots, N. \qquad (*)$$

Zeige: es gibt Geraden $L_i \subseteq V$, $i = 1, \ldots, N$, so dass

$$\begin{aligned} &\varphi_i(L_i) \subseteq L_{i+1} \text{ für } i = 1, \ldots, N-1, \\ &\psi_i(L_{i+1}) \subseteq L_i \text{ für } i = 1, \ldots, N-1, \\ &\varphi_N(L_N) \subseteq L_1,\ \psi_N(L_1) \subseteq L_N. \end{aligned}$$

Die Abbildungen φ_i, ψ_i lassen sich wie folgt in einem Diagramm veranschaulichen:



In jeder im Diagramm erscheinenden Kopie von V ist dann eine Gerade zu finden, so dass diese Geraden unter den Abbildungen φ_i, ψ_i ineinander abgebildet werden.

Bemerkung: Eine Variante dieser Aufgabe wird benutzt in dem Artikel *On the existence of F-crystals* von R. Kottwitz und M. Rapoport, siehe Comment. Math. Helv. **78** (2003), no. 1, 153–184. Der dort gegebene Beweis benutzt allerdings Methoden der algebraischen Geometrie.

Zu a) Es ist gerade zu zeigen, dass φ und ψ einen simultanen Eigenvektor besitzen. Da über einem algebraisch abgeschlossenen Körper jede Abbildung trigonalisierbar ist, und da φ und

ψ nach Voraussetzung vertauschen, sind sie nach Aufgabe 1 b) simultan trigonalisierbar; der erste Basisivektor der entsprechenden Basis ist sowohl ein Eigenvektor von φ als auch von ψ. Die von diesem Vektor erzeugte Gerade L hat dann die gewünschte Eigenschaft.

Natürlich ist a) auch ein Spezialfall von c), und der dort gegebene Beweis gilt auch im Fall $N = 1$ (ist allerdings für diesen Fall etwas komplizierter als nötig).

Zu b) Dies ist ein Spezialfall von c), den wir nicht gesondert behandeln.

Zu c) Wir zeigen zunächst, dass wir annehmen dürfen, dass gilt

$$\ker \varphi_i \neq 0, \quad \ker \psi_i \neq 0 \quad \text{für alle } i. \qquad (*)$$

Um dies zu beweisen, führen wir Induktion nach N und zeigen, dass wir die Kette verkürzen können, falls ein φ_i oder ein ψ_i trivialen Kern hat. Sei ohne Einschränkung etwa $\ker \varphi_N = 0$. Folglich ist φ_N ein Isomorphismus, und ψ_N muss die Nullabbildung sein. Ist $N = 1$, so definieren wir L einfach als die von einem beliebigen Eigenvektor von φ_N erzeugte Gerade. Sei nun $N > 1$. Wir betrachten die folgenden Endomorphismen:

$$\begin{aligned} \varphi'_{N-1} &:= \varphi_N \circ \varphi_{N-1} \\ \psi'_{N-1} &:= \psi_{N-1} \circ \varphi_N^{-1} \\ \varphi'_i &:= \varphi_i, \quad i = 1, \dots, N-2 \\ \psi'_i &:= \psi_i, \quad i = 1, \dots, N-2. \end{aligned}$$

Die φ'_i, ψ'_i, $i = 1, \dots, N-1$, erfüllen wieder die Voraussetzungen der Aufgabenstellung, und per Induktionsvoraussetzung dürfen wir annehmen, dass wir Geraden $L'_1, \dots L'_{N-1}$ finden, die wie gewünscht von den φ'_i und ψ'_i ineinander abgebildet werden. Wir erhalten dann die in der ursprünglichen Problemstellung gesuchten Geraden $L_1, \dots, L_N$, indem wir setzen:

$$\begin{aligned} L_N &:= \varphi_N^{-1}(L'_1) \\ L_i &:= L'_i, \quad i = 1, \dots, N-1. \end{aligned}$$

Nun sei die Bedingung (*) erfüllt. Durch Umnummerieren können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass

$$0 < \dim \ker \psi_N \leq \dim \ker \psi_i \quad \text{für alle } i. \qquad (**)$$

Betrachte nun die Abbildung

$$\Phi := \varphi_N \circ \varphi_{N-1} \circ \cdots \circ \varphi_1|_{\ker \psi_N} \colon \ker \psi_N \longrightarrow \ker \psi_N.$$

1. Fall: Die Abbildung Φ ist ein Isomorphismus.

Sei $v \in \ker \psi_N$ ein Eigenvektor von Φ, und sei L_1 die davon aufgespannte Gerade. Sei $L_i := \varphi_{i-1} \circ \cdots \circ \varphi_1(L_1)$, $i = 2, \dots, N$. Da Φ ein Isomorphismus ist, ist L_i für alle i eindimensional. Es gilt dann $\varphi_N(L_N) \subseteq L_1$ und $\varphi_i(L_i) \subseteq L_{i+1}$, $i = 1, \dots, N-1$, nach Definition der L_i, und $\psi_N(L_1) = 0 \subseteq L_N$, $\psi_i(L_{i+1}) = 0 \subseteq L_i$, $i = 1, \dots, N-1$.

2. Fall: Die Abbildung Φ ist kein Isomorphismus.

In diesem Fall sei $L_1 \subseteq \ker \Phi (\subseteq \ker \psi_N)$ eine beliebige Gerade. Sei j minimal, so dass

$$\varphi_{j-1} \circ \cdots \circ \varphi_1(L_1) = 0.$$

Wir definieren L_i für $i < j$ durch $L_i := \varphi_{i-1} \circ \cdots \circ \varphi_1(L_1)$. Nach Definition von j sind dies tatsächlich Geraden, und alle Bedingungen der Aufgabenstellung sind, soweit sie $L_1, \ldots, L_{j-1}$ betreffen, erfüllt.

Wir unterscheiden nun drei Fälle:

Fall A: $j = N + 1$.

In diesem Fall haben wir bereits alle gesuchten Geraden definiert, und da diese die gewünschten Eigenschaften haben, sind wir fertig.

Fall B: Die Abbildung $\Phi_1 := \varphi_N \circ \cdots \circ \varphi_j|_{\ker \psi_{j-1}} \colon \ker \psi_{j-1} \longrightarrow \ker \psi_N$ ist ein Isomorphismus.

In diesem Fall setzen wir $L_j := \Phi_1^{-1}(L_1)$ und ferner, für $j < i \leq N$: $L_i := \varphi_{i-1} \circ \cdots \circ \varphi_j(L_j)$. Damit sind alle gesuchten Geraden definiert, und haben die gewünschten Eigenschaften.

Fall C: Die in Fall B definierte Abbildung Φ_1 ist kein Isomorphismus.

Wegen (**) kann Φ_1 dann nicht injektiv sein. Sei $L_j \subseteq \ker \Phi_1 (\subseteq \ker \psi_{j-1})$ eine beliebige Gerade. Mit dieser verfahren wir weiter wie zum Beginn des 2. Falls. Nach endlich vielen Schritten landen wir in Fall A oder Fall B.