Lineare Algebra I — Klausur

Aufgabe 1

Bestimme eine Basis des Kerns und eine Basis des Bildes der linearen Abbildung

$$\ell_A\colon \mathbb{Q}^3 \longrightarrow \mathbb{Q}^4,$$

wobei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -4 & -5 & 2 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix} \in M_{4\times 3}(\mathbb{Q}).$$

(8+4 Punkte)

Aufgabe 2

Sei K ein Körper, sei $n \geq 1$ eine ganze Zahl, und seien $x, a_1, \ldots, a_n \in K$. Sei

$$A = \begin{pmatrix} x & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & x & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & a_2 & x & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n & 1 \end{pmatrix} \in M_{n+1}(K).$$

Zeige:

$$\det A = (x - a_1)(x - a_2)\cdots(x - a_n).$$

(11 Punkte)

Aufgabe 3

Sei $U \subseteq \mathbb{Q}^4$ der von den folgenden Vektoren erzeugte Unterraum:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Bestimme die Dimension von U und gib Unterräume $W, W' \subseteq \mathbb{Q}^4$ an (durch Angabe von Basen von W und W'), so dass gilt:

i) U und W sind Komplementärräume in $\mathbb{Q}^4$,
ii) U und W' sind Komplementärräume in $\mathbb{Q}^4$,
iii) W und W' sind Komplementärräume in $\mathbb{Q}^4$.

(4+10 Punkte)

Aufgabe 4

Sei
$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ -3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Q}).$$

a) Berechne das charakteristische Polynom von A.

b) Berechne die Eigenwerte von A in $\mathbb{Q}$.

c) Berechne Basen der Eigenräume von A (über $\mathbb{Q}$).

d) Ist A diagonalisierbar über $\mathbb{Q}$? Ist A trigonalisierbar über $\mathbb{Q}$?

(7+2+6+2 Punkte)

Aufgabe 5

Sei K ein Körper, und sei V ein K-Vektorraum. Sei $n \geq 2$ eine ganze Zahl und seien $v_1, \ldots, v_n \in V$ linear abhängige Vektoren, von denen jeweils $n-1$ linear unabhängig sind. Zeige:

a) Es existieren $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K \setminus \{0\}$, so dass $\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = 0$.

b) Seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ wie in a). Seien $\beta_1, \ldots, \beta_n \in K$ Elemente mit $\sum_{i=1}^n \beta_i v_i = 0$. Dann existiert $\gamma \in K$, so dass $\beta_i = \gamma \alpha_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$.

(6+10 Punkte)

Aufgabe 6

Seien K ein Körper, V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und sei $f \colon V \longrightarrow V$ eine lineare Abbildung.

a) Zeige, dass f genau dann von der Form $c \cdot \mathrm{id}_V$ für ein $c \in K$ ist, wenn jeder Vektor $v \in V \setminus \{0\}$ ein Eigenvektor von f ist.

b) Zeige, dass f genau dann invertierbar ist, wenn 0 kein Eigenwert von f ist.

c) Sei nun f invertierbar und sei λ ein Eigenwert von f. Zeige, dass λ^{-1} ein Eigenwert von f^{-1} ist, und dass
$$V(\lambda, f) = V(\lambda^{-1}, f^{-1}).$$

(8+4+6 Punkte)

Aufgabe 7

Sei K ein Körper und V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum. Ferner sei $f \colon V \longrightarrow V$ eine lineare Abbildung.

a) Zeige: Ist $f^2 = 0 \in \mathrm{End}_K(V)$, so gilt $\dim \ker f \geq \frac{1}{2} \dim V$.

b) Gilt auch die Umkehrung von a)? (Beweis oder Gegenbeispiel)

(6+6 Punkte)