Übungen zur Linearen Algebra II

Prof. Stefan Schwede
Dr. Jack Davies

Sommersemester 2024

Musterlösung 4 Philipp von Glasenapp

Aufgabe 4.1 ($*$ 10 Punkte) Seien U und W Untervektorräume eines Vektorraumes V mit $V = U \oplus W$. Gegeben zwei Endomorphismen $G\colon U \to U$ und $H\colon W \to W$, so definieren wir $F\colon V \to V$ durch die Formel $F(u+w) = G(u) + H(w)$ für $u \in U$ und $w \in W$. Zeige:

(i) F ist genau dann ein Isomorphismus, wenn G und H Isomorphismen sind.

(ii) F ist genau dann diagonalisierbar, wenn G und H diagonalisierbar sind.

(iii) F ist genau dann trigonalisierbar, wenn G und H trigonalisierbar sind.

(iv) F ist genau dann nilpotent, wenn G und H nilpotent sind.

(v) F ist genau dann idempotent, wenn G und H idempotent sind.

Lösung: (i) Seien G und H Isomorphismen. Definiere $A\colon V \to V$ durch $A(u+w) = G^{-1}(u) + H^{-1}(w)$ für $u \in U$ und $v \in V$. Es gilt

$$A(F(u+w)) = A(G(u)+H(w)) = G^{-1}(G(u)) + H^{-1}(H(u)) = u + w \text{ und}$$
$$F(A(u+w)) = F(G^{-1}(u) + H^{-1}(w)) = G(G^{-1}(u)) + H(H^{-1}(w)) = u + w$$

also ist A ein Inverses zu F und damit ist F ein Isomorphismus.
Sei nun F ein Isomorphismus, dann ist es injektiv also gilt insbesondere für $u \in U$

$$G(u) = 0 \Leftrightarrow F(u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$$

damit ist G injektiv. Das gleiche Argument gibt die Injektivität von H. Für Surjektivität, sei $u \in U$ beliebig. Da F surjektiv gibt es $u' + w' \in V$, so dass $F(u' + w') = u$. Bei der Definition von F ist dies äquivalent zu $G(u') + H(w') = u$, da $u \in U$ und $H(w') \in W$ ist $G(u') = u$. Also ist G surjektiv. Genauso ist H dann auch surjektiv.
(ii) Sei $u_1, ..., u_n$ eine Basis von U aus Eigenvektoren von G mit Eigenwert λ_i und $w_1, ..., w_k$ eine Basis von W aus Eigenvektoren von H mit Eigenwerten μ_i. Dann ist $u_1, ..., u_n, w_1, ..., w_k$ eine Basis von V, und $F(u_i) = G(u_i) = \lambda_i u_i$ sowie $F(w_i) = \mu_i w_i$ also sind dies auch Eigenektoren von F.
Sei $u_1 + w_1, ..., u_n + w_n$ eine Basis von V aus Eigenvektoren von F jeweils mit Eigenwert λ_i. Also gilt $\lambda_i u_i + \lambda_i w_i = F(u_i + w_i) = G(u_i) + H(w_i)$. Die Zerlegung von Vektoren $v \in V$ in $v = u + w$ ist eindeutig, also gilt $G(u_i) = \lambda_i u_i$ und $H(w_i) = \lambda_i w_i$. Also ist $u_1, ..., u_n$ ein Erzeugendensystem von U aus Eigenvektoren von G. Also ist G diagonalisierbar. Genauso ist H dann auch diagonalisierbar.
(iii) Sei $B_U = (u_1, ..., u_n)$ eine Basis von U und $B_W = (w_1, ..., w_k)$ eine Basis von W. Da $F(u_i) = G(u_i)$ und $F(w_i) = H(w_i)$ ist die Basis darstellung von F bezüglich der Basis $B_V = (u_1, ..., u_n, w_1, ..., w_k)$ gegeben durch

$$M_{B_V}(F) = \begin{pmatrix} M_{B_U}(G) & 0 \\ 0 & M_{B_W}(H) \end{pmatrix}$$

daraus folgt $p_F(x) = p_G(x)p_H(x)$. Also zerfällt p_F genau dann in Linearfaktoren wenn p_G und p_H zerfällt. Daher ist F genau dann trigonalisierbar, wenn G und H es sind.
(iv) Es gilt $F^n(u+w) = G^n(u) + H^n(w)$ für $u \in U, w \in W$, also ist

$$\begin{aligned} F^n = 0 &\Leftrightarrow (\forall u + w \in V) : F^n(u+w) = 0 \\ &\Leftrightarrow (\forall u \in U, w \in W) : G^n(u) = 0 \text{ und } H^n(w) = 0 \\ &\Leftrightarrow G^n = 0 \text{ und } H^n = 0. \end{aligned}$$

insbesondere ist F nilpotent genau dann wenn H und G es sind.
(v) Es gilt wieder $F^2(u+w) = G^2(u) + H^2(w)$, also ist $F^2(u+w) = F(u+w)$ genau dann wenn $G^2(u) + H^2(w) = G(u) + H(w)$. Wegen der Eindeutigkeit der Zerlegung in $U \oplus W$ ist letzteres äquivalent zu $G^2(u) = G(u)$ und $H^2(w) = H(w)$.

Aufgabe 4.2 ($*$ 10 Punkte) Bestimme für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

eine invertierbare Matrix $P \in GL(3;\mathbb{R})$, eine Diagonalmatrix D und eine nilpotente Matrix N, sodass $A = S(D+N)S^{-1}$ und $DN = ND$.

Lösung: Wir berechnen als erstes das charakteristische Polynom.

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 & -2 \\ -2 & -\lambda & 1 \\ 2 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} &= \lambda^2(3-\lambda) + (-2)^2 - 2(-\lambda)(-2) - (3-\lambda) \\ &= -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 3\lambda + 1 = (1-\lambda)^3 \end{aligned}$$

Wir kriegen den Eigenraum

$$(1, A) = \ker \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = ((1,1,-1)^t)$$

damit ist die geometrische Vielfachheit 1. Wir berechnen

$$\ker((A-E)^{3-1}) = \ker \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} = ((1,1,-1)^t, (1,0,0)^t)$$

Wir wählen $v = (0,1,0)^t \notin \ker((A-E)^{3-1})$ dann ist $\mathcal{B} = ((A-E)^2 v, (A-E)v, v)$ unsere gewünschte Basis. Damit ist

$$S = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und durch den Gauß-Jordan Algorithmus bekommen wir

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Es ist dann

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

damit ist

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und

$$DN = N = ND$$

Aufgabe 4.3 Sei A die folgende Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 & -2 \\ -3 & 3 & 5 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

(i) Zeige, dass $p_A(t) = (t-2)^4$ das charakteristisches Polynom von A ist.

(ii) Finde eine Matrix $P \in GL(4;\mathbb{Q})$ sodass $A = PTP^{-1}$ gilt, wobei $T = 2 \cdot E_4 + N$ für eine nilpotente Matrix N.

Lösung : (i)
Es ist

$$\begin{aligned}
p_A(t) =& \det \begin{pmatrix} 1-t & 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1-t & -3 & -2 \\ -3 & 3 & 5-t & 3 \\ -1 & 2 & 2 & 3-t \end{pmatrix} \\
=&(1-t)\det \begin{pmatrix} -1-t & -3 & -2 \\ 3 & 5-t & 3 \\ 2 & 2 & 3-t \end{pmatrix} - 2\det \begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 \\ -3 & 5-t & 3 \\ -1 & 2 & 3-t \end{pmatrix} \\
&+ 2\det \begin{pmatrix} 2 & -1-t & -2 \\ -3 & 3 & 3 \\ -1 & 2 & 3-t \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} 2 & -1-t & -3 \\ -3 & 3 & 5-t \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \\
=&(1-t)(-t^3+7t^2-14t+8) - 2(2t^2-5t+2) + 2(3t^2-9t+6) - (-t^2+2t) \\
=&t^4 - 8t^3 + 24t^2 - 32t + 16 = (t-2)^4
\end{aligned}$$

(ii)
Wir berechenen $Eig(2,A) = \ker(A-2E)$

$$\ker \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & -3 & -2 \\ -3 & 3 & 3 & 3 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \overset{II+2I, III-3I, IV-I}{=} \ker \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = ((1,0,0,1)^t, (0,1,-1,0)^t)$$

weiter ist

$$\ker((A-2E)^2) = \ker \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & -3 \\ -3 & 0 & 0 & 3 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = ((1,0,0,1)^t, (0,1,-1,0)^t, (0,1,0,0)^t)$$

und

$$\ker((A-2E)^3) = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = ((1,0,0,1)^t, (0,1,-1,0)^t, (0,1,0,0)^t, (1,0,0,0)^t).$$

Also wählen wir als Basis $\mathcal{B} = ((1,0,0,1)^t, (0,1,-1,0)^t, (0,1,0,0)^t, (1,0,0,0)^t)$ und damit ist

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

wobei wir P aus P^{-1} durch den Gauß-Jordan algorithmus erhalten. Nach dem Basis wechsel ist A gegeben durch

$$PAP^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 & -2 \\ -3 & 3 & 5 & 3 \\ -1 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & -3 & -5 & -3 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

dies hat die gewünschte Form.

Aufgabe 4.4 ($*$ 10 Punkte) Zeige:

(i) Ist $A \in M(n \times n; K), P \in GL(n; K)$ und $m \geq 1$, so gilt $(PAP^{-1})^m = PA^mP^{-1}$.

(ii) Sind $A, B \in M(n \times n; K)$ mit $AB = BA$ und $m \geq 1$, so gilt $(A+B)^m = \sum_{0 \leq i \leq m} \binom{m}{i} A^i B^{m-i}$.

(iii) Mit Hilfe von (i) und (ii), berechne A^{50} für A von Aufgabe 4.2.

Lösung: (i)

Durch umsortieren bekommen wir

$$(PAP^{-1})^m = P(AP^{-1}P)^{m-1}AP^{-1} = P(A^{m-1})AP^{-1} = PA^mP^{-1}.$$

(ii)

Wir werden die Aussage durch Induktion zeigen. Für $m = 1$ ist die Aussage

$$(A+B) = \sum_{i=0}^{1} \binom{1}{i} A^i B^{m-i} = A + B$$

also korrekt. Sei die Aussage wahr für m, dann ist

$$\begin{aligned}(A+B)^{m+1} = (A+B)^m(A+B) &= (\sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} A^i B^{m-i})(A+B) \\ &= \sum_{i=1}^{m+1} \binom{m}{i-1} A^i B^{(m+1)-i} + \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} A^i B^{(m+1)-i} \\ &= \sum_{i=0}^{m+1} \left(\binom{m}{i-1} + \binom{m}{i} \right) A^i B^{(m+1)-i} = \sum_{i=0}^{m+1} \binom{m+1}{i} A^i B^{(m+1)-i}\end{aligned}$$

(iii)

Nach der (i) ist

$$A^{50} = S(D+N)^{50}S^{-1}$$

und mit der (ii) ist $(D+N)^{50} = \sum_{i=0}^{50} \binom{50}{i} N^i D^{50-i}$. Es ist $D^{50-i} = D$ für alle $i \in \mathbb{N}$ und $N^0 = D, N^1 = N, N^2 = E_{3,3}$. Also ist

$$\sum_{i=0}^{50} \binom{50}{i} N^i D^{50-i} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 50 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1225 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Folglich

$$A^{50} = S(D+N)^{50}S^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 50 & 1225 \\ 0 & 1 & 50 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 101 & -2450 & -2550 \\ -100 & 2401 & 2500 \\ 100 & -2400 & -2499 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4.5 ($*$ 10 Punkte) Für jede Matrix $A \in M(n \times n; \mathbb{R})$ definieren wir

$$\exp(A) = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} A^k \in M(n \times n; \mathbb{R}).$$

Wir verwenden ohne Beweis, dass die unendliche Summe koeffizientenweise absolut konvergiert, und somit $\exp(A)$ wohldefiniert ist.

(i) Bestimme $\exp(D)$ für eine Diagonalmatrix D.

(ii) Ist $A \in M(n \times n; \mathbb{R})$ und $P \in GL(n; \mathbb{R})$, so folgt $\exp(PAP^{-1}) = P(\exp A)P^{-1}$.

(iii) Sind $A, B \in M(n \times n; \mathbb{R})$ mit $AB = BA$, so gilt $\exp(A + B) = \exp(A)\exp(B)$.

(iv) Berechne $\exp(M)$ für die Matrix A von Aufgabe 4.2.

Lösung: Sei

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_k \end{pmatrix}$$

Dann ist

$$D^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_k^n \end{pmatrix}$$

und damit

$$exp(D) = \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\lambda_1^n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\lambda_2^n & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\lambda_k^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \exp(\lambda_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \exp(\lambda_k) \end{pmatrix}$$

(ii)
Wir benutzen die 4.4 (i) und bekommen

$$\exp(PAP^{-1}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(PAP^{-1})^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{PA^nP^{-1}}{n!} = P(\exp(A))P^{-1}$$

(iii)
Es gilt

$$\begin{aligned} \exp(A+B) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(A+B)^m}{m!} \overset{4.4(ii)}{=} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{m} \binom{m}{n} A^n B^{m-n} (m!)^{-1} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{m} A^n (n!)^{-1} B^{m-n} ((m-n)!)^{-1} \\ &= \left(\sum_{m=0}^{\infty} A^m (m!)^{-1} \right) \left(\sum_{m=0}^{\infty} B^m (m!)^{-1} \right) = \exp(A)\exp(B) \end{aligned}$$

(iv)
Wir berechnen als erstes

$$\exp(D) = eD, \ \exp(N) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{N^n}{n!} = N^0 + N^1 + N^2/2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dann ist $\exp(D+N) = \exp(D)\exp(N) = e\exp(N)$ und

$$\begin{aligned}
\exp(A) &= S\exp(D+N)S^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & e & e/2 \\ 0 & e & e \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3e & -e & -3e \\ -2e & e & 2e \\ 2e & 0 & -e \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Aufgabe 4.6 Sei $F\colon V \to V$ ein Endomorphismus mit $F^3 = F$. Zeige, dass F diagonalisierbar ist.

Lösung: Sei $v \in V$, dann ist $v = (v - F^2(v)) + (F^2(v) - F(v))/2 + (F^2(v) + F(v))/2$ außerdem ist

$$\begin{aligned}
F(v - F^2(v)) &= F(v) - F^3(v) = 0(v - F^2(v)) \\
F(F^2(v) - F(v)) &= F^3(v) - F^2(v) = -(F^2(v) - F(v)) \\
F(F^2(v) + v) &= F^3(v) + F^2(v) = F^2(v) + F(v)
\end{aligned}$$

insbesondere lässt sich v als Summe aus Eigenvektoren von F schreiben. Da v beliebig war, gibt es eine Basis von V aus Eigenvektoren von F also ist F diagonalisierbar.