Übungen zur Linearen Algebra II

Prof. Stefan Schwede
Dr. Jack Davies

Sommersemester 2024

Blatt 6
40 Punkte

Abgabetermin: 04.06.2024, vor der Vorlesung um 8:15
Nur die vier Aufgaben, die mit einem $(*)$ bezeichnet sind, werden korrigiert und gewertet; für alle anderen Aufgaben brauchen keine Lösungen eingereicht zu werden.

Aufgabe 6.1 ($*$ 10 Punkte) Sei $\langle -, - \rangle$ ein Skalarprodukt auf einem $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Norm $|| - ||$. Zeige, dass folgende Eigenschaften gelten:

(i) $\langle x + y, x - y \rangle = ||x||^2 - ||y||^2$

(ii) $||x - y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2 - 2\langle x, y \rangle$

(iii) $||x + y||^2 - ||x - y||^2 = 4\langle x, y \rangle$

(iv) $||x + y||^2 + ||x - y||^2 = 2||x||^2 + 2||y||^2$

Aufgabe 6.2 ($*$ 10 Punkte) Sei $J : V \to V$ ein Endomorphismus eines reellen Voktorraumes mit der Eigenschaft $J^2 = -1$. Ein solcher Endomorphismus wird auch eine *komplexe Struktur* auf V genannt.

(i) Zeige, dass V zusammen mit der gegebenen Addition und mit der Skalarmultiplikation

$$\cdot : \mathbb{C} \times V \to V, \quad (a + ib) \cdot v = a \cdot v + b \cdot J(v),$$

für $a, b \in \mathbb{R}$ und $v \in V$, zu einem komplexen Vektorraum wird.

(ii) Angenommen, V ist endlich-dimensional. Zeige, dass dann gilt $\dim_{\mathbb{C}} V = 2 \cdot \dim_{\mathbb{R}} V$. Insbesondere ist die reelle Dimension von V gerade.

Aufgabe 6.3 Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$ und $S = (v_1, \ldots, v_r)$ eine orthonormale Familie in V. Beweise, dass die folgenden Bedingungen äquivalent sind:

(i) S ist eine Basis von V.

(ii) Ist $v \in V$, so folgt aus $\langle v, v_i \rangle = 0$ für alle i, dass $v = 0$ ist.

(iii) Für alle $v \in V$ gilt $v = \sum_{i=1}^{r} \langle v, v_i \rangle \cdot v_i$.

(iv) Für alle $v, w \in V$ gilt $\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^{r} \langle v, v_i \rangle \cdot \langle v_i, w \rangle$.

(v) Für alle $v \in V$ gilt $||v||^2 = \sum_{i=1}^{r} |\langle v, v_i \rangle|^2$.

Aufgabe 6.4 ($*$ 10 Punkte) Sei V der Vektorraum der stetigen Abbildungen $[0, 2\pi] \to \mathbb{R}$.

(i) Zeige, dass durch $\langle f, g \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx$ ein Skalarprodukt auf V definiert wird.

(ii) Zeige, dass die Familie $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots)$ orthonormal bezüglich des Skalarproduktes aus (i) ist.

(iii) Ist $f(x) = \frac{a_0}{\sqrt{2}} + \sum_{k \geq 1} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ mit $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, so gilt $a_k = \langle f, \cos kx \rangle$ und $b_k = \langle f, \sin kx \rangle$.

Aufgabe 6.5 ($*$ 10 Punkte) Gegeben sei auf $V = span(1, t, t^2, t^3) \subseteq \mathbb{R}[t]$ das Skalarprodukt

$$s(f, g) = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt.$$

(i) Bestimme die darstellende Matrix von s bezüglich der Basis $(1, t, t^2, t^3)$.

(ii) Bestimme eine Orthonormalbasis von V.

Aufgabe 6.6 Eine Matrix $A \in M(n \times n; \mathbb{R})$ heißt *normal* wenn gilt ${}^tA \cdot A = A \cdot {}^tA$. Die Matrix heißt *orthogonal* wenn gilt ${}^tA \cdot A = E_n$.

(i) Zeige, dass jede normale 2×2-Matrix symmetrisch oder ein skalares Vielfaches einer orthogonalen Matrix ist.

(ii) Zeige, dass die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

normal ist, aber weder symmetrisch noch ein skalares Vielfaches einer orthogonalen Matrix.