

Felix Hausdorff and the Early Development of Descriptive Set Theory

Peter Koepke, University of Bonn

IIT Kanpur, September 25, 2008

Contents

Descriptive Set Theory

The Life of Felix Hausdorff

The Work of Felix Hausdorff

Descriptive Set Theory in the Work of Hausdorff

The Development of Descriptive Set Theory before the “Grundzüge”

Hausdorff’s work in descriptive set theory

Concluding Remarks

Felix Hausdorff

November 8, 1868 born in Breslau (now Wroclaw, Poland)

1887 -1891 Study of Mathematics and Astronomy at Freiburg, Berlin and Leipzig

1895 Habilitation Leipzig

1899 married Charlotte Goldschmidt

1903 Professor Leipzig

1910 Professor Bonn

1913 Professor Greifswald

1914 Publication of *Grundzüge der Mengenlehre*

1921 Chair of Mathematics Bonn

1935 Emeritus Bonn

January 26, 1942 Suicide together with his wife and sister in law at Bonn

The Work of Felix Hausdorff

Mathematical Books: *Grundzüge der Mengenlehre*, 1914, *Mengenlehre*, 1927, 1935

more than 40 scientific papers in mathematics and astronomy

3 Books: aphorisms, poems, philosophy under the pseudonym *Paul Mongre*

Literary and cultural criticism (*Paul Mongre*)

Nachlass 26.000 handwritten pages at the University Library, Bonn

Hausdorff Edition

Principle Editors: E. Brieskorn, F. Hirzebruch, W. Purkert, R. Remmert, E. Scholz

1. Set Theory
2. *Grundzüge der Mengenlehre*
3. Descriptive Set Theory and Topology
4. Analysis, Algebra, Number Theory
5. Applied Mathematics
6. Geometry, Space and Time
7. Philosophical Work
8. Literary Work

Descriptive Set Theory

Parts of *Grundzüge* and *Mengenlehre*

Papers: 1916 *Die Mächtigkeit der Borelschen Mengen*
1919 *Über halbstetige Funktionen und deren Verallgemeinerung*
1924 *Die Mengen G_δ in vollständigen Räumen*
1930 *Erweiterung einer Homöomorphie*
1933 *Zur Projektivität der δ s-Funktionen*
1934 *Über innere Abbildungen*
1937 *Die schlichten stetigen Bilder des Nullraums*
Parts of the following:
1908 *Grundzüge einer Theorie der geordneten Mengen*
1909 *Die Graduierung nach dem Endverlauf*
1936 *Summen von \aleph_1 Mengen*
1936 *Über zwei Sätze von G. Fichtenholz and L. Kantorovitch*
1938 *Erweiterung einer stetigen Abbildung*

The Development of Descriptive Set Theory before Hausdorff

- 1872 G. Cantor, Fourierseries, Sets of Uniqueness
1884 G. Cantor, Cardinalities of Closed Sets
1898 E. Borel, Leçons sur la theorie des fonctions, Measurable sets, σ -Additivity
1903 W. H. Young, Cardinalities of G_δ -sets
1905 H. Lebesgue, Sur les fonctions representables analytiquement

Foundational Issues

1904 E. Zermelo, Beweis, daß jede Menge wohlgeordnet werden kann

1905 E. Borel, Quelques remarques sur les principes de la theorie des ensembles

1905 R. Baire, E. Borel, J. Hadamard, H. Lebesgue, Cinq lettres sur la theorie des ensembles

The Introduction of Descriptive Sets in *Grundzüge*

Ch. 4 - 6 Ordered Sets

Ch. 7 Pointsets in General Spaces, Hausdorff's Axioms for Topology

Ch. 8 Pointsets in Special Spaces 2. First Countability 3. Second Countability 6. Metric Spaces 7. **Borel Sets**

Ch. 9 Maps and Functions 5. Baire Classes of Functions

Appendix: Cardinalities of $G_{\delta\sigma\delta}$ -Sets, The Hausdorff Paradox

Hausdorff's Foundational Standpoint

Hierher gehört auch die vielumstrittene Frage, unter welchen Bedingungen ein mathematisches Objekt, etwa eine Zahl, eine Menge, eine Funktion als "definiert" anzusehen sei (die Frage nach der Definition einer "Definition"). Wir folgen der freien Auffassung Cantors [...] und verlangen nicht, daß die logische Disjunktion, ob ein Ding einer Menge angehört oder nicht, mit unseren aktuellen Mitteln wirklich entschieden werden könne. [...] Dieser Mengenbegriff und dieser (Dirichletsche) Funktionenbegriff bindet sich weder an Kriterien, die nur eine endliche Anzahl von Versuchen erfordern, noch an analytische Darstellungen u. dgl. [*Grundzüge*]

Descriptive Set Theory in Hausdorff's Mengenlehre, 1927, 1935

Metric standpoint instead of topological standpoint

Complete treatment of Borel sets, Souslin sets, Baire functions

First textbook on descriptive set theory

Hausdorff's Contributions to Descriptive Set Theory

Cardinalities of Borel sets (also P. Alexandroff, independently)

Hausdorff gaps

Complete metric spaces

δ s-operations

Reducible Sets, Hausdorff Difference Hierarchy

Notations like G_δ , F_σ

Alexandroff and Hopf

Die deskriptive Mengenlehre wurde (anschließend an BAIRES Arbeiten über un-
stetige Funktionen) von LEBESGUE 1905 begründet. Ihre weitere Entwicklung
beginnt elf Jahre später mit dem Mächtigkeitssatz für die Borelschen Mengen,
... . [Alexandroff and Hopf, Topologie]