Seventh exercise sheet "Class field theory" summer term 2025.

Problem 1 (4 points)**.** *Let G be infinite cylic with generator $\sigma \in G$. In other words, $\mathbb{Z} \xrightarrow{k \to \sigma^k} G$ must be bijective. Show that the cochain complex, in which the terms M are in cohomological degrees 0 and 1,*

$$0 \to M \xrightarrow{\sigma - \mathrm{Id}_M} M \to 0$$

calculates $H^*(G, M)$!

Let G be finite M a G-module. Throughout the following two problems we fix a subgroup $H \subseteq G$. We define

$$\hat{H}^*(G, M) \xrightarrow{\mathrm{Res}_H^G} \hat{H}^*(H, M)$$

as the composition

$$\hat{H}^*(G, M) \to \hat{H}^*\big(G, \mathrm{Ind}_H^G M\big) \cong \hat{H}^*(H, M)$$

and $\hat{H}^*(H, M) \xrightarrow{\mathrm{Cores}_G^H} \hat{H}^*(G, M)$ as the composition

$$\hat{H}^*(H, M) \cong \hat{H}^*\big(G, \mathrm{Ind}_H^G M\big) \to \hat{H}^*(G, M).$$

In this, the isomorphisms are from Corallary 1.3.7 from the lecture and the other morphisms the result of applying the functor $\hat{H}^*(G, -)$ to the morphism between M and $\mathrm{Ind}_H^G M$ obtained by applying Frobenius reciprocity (1.1.1/2) from the lecture to the morphism $M \xrightarrow{\mathrm{Id}_M} M$ of H-modules.

Problem 2 (3 points)**.** *Show that* $\mathrm{Cores}_G^H \mathrm{Res}_H^G$ *equals multiplication by $[G : H]$!*

In the following considerations, "cohomological functor" will be used synomously with "$\mathbb{Z}$-graded cohomological functor". This is different from subsection 1.2 of the lecture and the exercise sheets devoted to it, where the grading only ran from 0 to ∞.

Problem 3 (9 points)**.** *Prove three of the following assertions!*

- *Restriction $\hat{H}^*(G, \cdot) \xrightarrow{\mathrm{Res}_H^G} \hat{H}^*(H, \cdot)$ is the unique morphism of cohomological functors on the category of G-modules such that $\mathrm{Res}_H^G h$ equals the image of η under $M^H \to \hat{H}^0(H, M)$ when h is the image of $\eta \in M^G$ under $M^G \to \hat{H}^0(G, M)$.*
- *If $h \in \hat{H}^{-1}(G, M)$ is the image of $\eta \in \mathrm{Ker}(M \xrightarrow{\mathrm{Tr}_G} M)$ then $\mathrm{Res}_H^G h$ is the image of $\sum_{\gamma H \in G/H} \gamma\eta$ in $\hat{H}^{-1}(H, M)$.*
- *If $a \in \hat{H}^p(G, A)$ and $b \in \hat{H}^q(G, B)$ then*

$$\mathrm{Res}_H^G(a \odot b) = (\mathrm{Res}_H^G a) \odot (\mathrm{Res}_H^G b).$$

- *Corestriction* $\hat{H}^*(H,\cdot) \xrightarrow{\mathrm{Cores}_G^H} \hat{H}^*(G,\cdot)$ *is the unique morphism of cohomological functors on the category of G-modules such that* $\mathrm{Cores}_H^G h$ *equals the image of* $\sum \gamma H \in G/H \gamma\eta$ *under* $M^G \to \hat{H}^0(G,M)$ *when h is the image of $\eta \in M^H$ in* $\hat{H}^0(H,M)$.
- *If* $h \in \hat{H}^{-1}(H,M)$ *is the image of* $m \in \mathrm{Ker}(M \xrightarrow{\mathrm{Tr}_H} M)$ *then* $\mathrm{Cores}_G^H h$ *is the image of m in* $\hat{H}^{-1}(G,M)$.
- *If* $a \in \hat{H}^p(H,A)$ *and* $b \in \hat{H}^q(G,B)$ *then*

$$\mathrm{Cores}_G^H\big(a \odot \mathrm{Res}_H^G b\big) = \big(\mathrm{Cores}_G^H a\big) \odot b.$$

Remark 1.
- *It is also easy to see that restriction and corestriction are uniquely characterized by their explicit description in cohomological degree* -1 *and the fact that they are morphisms of cohomological functors.*
- *For a partial uniqueness assertion only the compatibility with some connecting morphisms is needed. For instance,* Res *in degree* -1 *is uniquely determined by* Res *in degree* 0 *and compatibility with*

$$\hat{H}^{-1}(M'') \xrightarrow{d_{\mathcal{M}}} \hat{H}^0(M').$$

This, together with Problem 4 from the previous sheet, can be used to avoid unpleasant calculations in the treatment of the second and fifth point.

Problem 4 (2 points)**.** *Show that the diagram*

$$\begin{tikzcd}
\hat{H}^{-2}(H,\mathbb{Z}) \arrow[r, "\mathrm{Cores}"] \arrow[d, "\cong"'] & \hat{H}^{-2}(G,\mathbb{Z}) \arrow[d, "\cong"'] \\
H_{\mathrm{ab}} \arrow[r] & G_{\mathrm{ab}}
\end{tikzcd}$$

commutes, where the lower horizontal arrow is the homomorphism defined by applying the functor $(-)_{\mathrm{ab}}$ *to the inclusion* $H \to G$*!*

The cohomological approach to local class field theory starts by establishing isomorphisms

$$H^2(L/K, L^\times) \xrightarrow{\mathrm{inv}_{L/K}} \frac{\mathbb{Z}}{[L:K]} \Big/ \mathbb{Z} \tag{1}$$

for finite Galois extension local fields. Let $K \subseteq E \subseteq L$ be an intermediate field. The behaviour of inv under Res and Cores for $\mathrm{Gal}(L/E) \subseteq$

$\mathrm{Gal}(L/K)$ is

$$\mathrm{inv}_{L/E}(\mathrm{Res} x) = [E:K]\mathrm{inv}_{L/K}(x)$$
$$\mathrm{inv}_{L/K}(\mathrm{Cores} y) = \mathrm{inv}_{L/E}(y).$$

It follows that for such Galois extensions there is a unique *fundamental class* $u_{L/K} \in \hat{H}^2(L/K, L^\times)$ such that

$$\mathrm{inv}_{L/K}\big(u_{L/K}\big) = \frac{1}{[L:K]} \bmod \mathbb{Z}.$$

Problem 5 (2 points)**.** *In the above situation, show that*

$$\mathrm{Res}(u_{L/K}) = u_{L/E}$$
$$\mathrm{Cores}(u_{L/E}) = [E:K]u_{L/K}!$$

Using a result of Tate, namely Theorem 2 from subsection 1.5 of the lecture, one derives that

$$\hat{H}^p(L/K, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\odot u_{L/K}} \hat{H}^{p+2}(L/K, L^\times) \tag{2}$$

is an isomorphism. When $p = -2$ this gives us an isomorphism

$$\mathrm{Gal}(L/K)_{\mathrm{ab}} \cong \hat{H}^{-2}(L/K, \mathbb{Z}) \cong \hat{H}^0(L/K, L^\times) \cong K^\times \big/ N_{L/K}L^\times.$$

Let

$$K^\times \big/ N_{L/K}L^\times \xrightarrow{\psi_{L/K}} \mathrm{Gal}(L/K)_{\mathrm{ab}} \tag{3}$$

be the inverse of that isomorphism.

Problem 6 (2 points)**.** *If E is an intermediate field between L and K as above and $e \in E$, show that $\psi_{L/K}\big(N_{E/K}(e)\big)$ is the image of $\psi_{L/E}(e)$ under the homomorphism* $\mathrm{Gal}(L/E)_{\mathrm{ab}} \to \mathrm{Gal}(L/K)_{\mathrm{ab}}$ *defined by the inclusion* $\mathrm{Gal}(L/E) \subseteq \mathrm{Gal}(L/K)$*!*

Two of the 22 points from this sheet are bonus points which do not count in the calculation of the 50%-limit for passing the exercises module. Solutions should be submitted to the tutor by e-mail before Tuesday June 3 24:00.

Since the material in subsection 1.3 cannot easily be learned from any textbook, I append the current version of the script to this exercise sheet. This is only intendes for listeners of this lecture, not for a general audience. Also, the material in sections 2 and 3 is still quite likely to change. Please do not distribute this script to anyone else.

1. Gruppenhomologie- und Kohomologie

Einführung: G-Moduln, Invarianten, Koinvarianten.

Beispiel: $\mathbb{C}^\times \xrightarrow{\text{Quadrierung}} \mathbb{C}^\times$.

Gruppenhomologie bzw. -kohomologie soll die fehlende Exaktheit dieser Funktoren durch eine lange exakte Kohomologiefolge ersetzen.

1.1. Eigenschaften der Kategorie der G-Moduln.

Definition 1. G-Modul und $\mathbb{Z}[G]$-Moduln für diskretes G.

Definition 2. Produkte, Coprodukte.

Beispiel 1. Moduln.

Definition 3. Punktierte Kategorie, additive Kategorie.

Beispiel 2. Punktierte Räume, (Abelsche) Gruppen, Moduln, Benachräume.

Definition 4. Kern, Kokern. Mono, Epi. Abelsche Kategorien.

Definition 5. Injektives Objekt, projektives Objekt. Genügend viele davon.

Beispiel 3. R^n, $R[X]$ als projektive R-Moduln. Insbesondere genügend viele.

Satz 1 (Kriterium von Baer)**.**

Folgerung 1. *Injektive abelsche Gruppen. Es gibt genügend viele.*

Definition 6. $\mathrm{Ind} \xrightarrow{\pi} N$, $N \xrightarrow{\iota} \mathrm{ind}$

Beispiel 4. $\mathbb{Z}[G]$ mit $(fg)(\eta) = \sum_\gamma f(\eta\gamma^{-1})g(\gamma)$.

Definition 7. $\otimes$, $\mathfrak{Hom}$.

Satz 2 (Frobenius-Reziprozität)**.**

$$\mathrm{Hom}_G(M, \mathrm{Ind}_H^G N) \cong \mathrm{Hom}_H(M, N) \tag{1}$$
$$f \to \phi = \pi_{G,H} f$$
$$\phi \to \big(f(m)\big)(\gamma) = \phi(\gamma m)$$

$$\mathrm{Hom}_G(\mathrm{ind}_H^G N, M) \cong \mathrm{Hom}_H(N, M) \tag{2}$$
$$f \to \phi = f\iota_{G,H}$$
$$\phi \to f(\nu) = \sum_{H\gamma \in H\backslash G} \gamma^{-1}\phi\big(\nu(\gamma)\big)$$

$$(\mathrm{ind}_H^G N) \otimes M \cong \mathrm{ind}_H^G(N \otimes M) \tag{3}$$
$$\phi \otimes m \to f(g) = \phi(g) \otimes gm$$

$$\mathfrak{Hom}_G(M, \mathrm{ind}_H^G N) \cong \mathrm{Ind}_H^G \mathfrak{Hom}(M, N) \tag{4}$$

Definition 8. Adjungiertes Funktorpaar.

Fakt 1. Die Kategorien seien als additiv vorausgesetzt.

- Jeder adjungierte Funktor erhält das Nullobjekt.
- Jeder linksadjungierte Funktor erhält Kokerne.
- Jeder rechtsadjungierte Funktor erhält Kerne.

Definition 9. Linksexakt, Rechtsexakt.

Fakt 2. Jeder linksadjungierte eines exakten Funktors erhält Projektivität, jeder rechtsadjungierte eines exakten Funktors Injektivität.

Fakt 3. Es gibt genügende viele injektive und projektive $\mathbb{Z}[G]$.

1.2. **Homologie und Kohomologie als abgeleitete Funktoren.**

Definition 1. Kohomologische d-Funktoren. Abgeleitete Funktoren.

Theorem 1. *Es sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie mit genügend vielen injektiven Objekten.*

- *Jeder linksexakte Funktor von $\mathcal{A}$ mit Werten in einer beliebigen abelschen Kategorie hat einen rechtsabgeleiteten Funktor.*
- *Sei Φ^i ein kohomologischer δ-Funktor. Dann ist Φ^* genau dann ein rechtsabgeleiteter Funktor von Φ^0, wenn $\Phi^i I = 0$ für alle injektiven Objekte I gilt.*
- *Sei $\mathcal{F}\colon 0 \to \Phi' \to \Phi \to \Phi'' \to 0$ eine Folge von linksexakten Funktoren von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$ und von Funktormorphismen, so daß für jedes injektive Objekt I die Folge*

$$0 \to \Phi' I \to \Phi I \to \Phi'' I \to 0$$

exakt ist. Dann gibt es genau eine Folge von natürlichen Transformationen $R^i\Phi'' \xrightarrow{\delta_{\mathcal{F}}} R^{i+1}\Phi'$, so daß für jedes Objekt X von $\mathcal{A}$ die Folge

$$(1)\quad 0 \to \Phi' X \to \Phi X \to \Phi'' X \xrightarrow{\delta_{\mathcal{F}}} R^1\Phi' X \to \dots$$
$$\dots R^{i-1}\Phi'' X \xrightarrow{\delta_{\mathcal{F}}} R^i\Phi' X \to R^i\Phi X \to R^i\Phi'' X \xrightarrow{\delta_{\mathcal{F}}} R^{i+1}\Phi' X \to \dots$$

exakt ist und so daß für jede kurze exakte Folge in $\mathcal{A}$ das Quadrat

$$(2)\quad \begin{array}{ccc} R^i\Phi'' X'' & \xrightarrow{\delta^i_{\mathcal{F}}} & R^{i+1}\Phi' X'' \\ \downarrow{\scriptstyle \delta_{\Phi''}} & & \downarrow{\scriptstyle \delta_{\Phi'}} \\ R^{i+1}\Phi'' X' & \xrightarrow{\delta^{i+1}_{\mathcal{F}}} & R^{i+2}\Phi' X' \end{array}$$

antikommutiert *(also $\delta^{i+1}_{\mathcal{F}}\delta_{\Phi''} = -\delta^i_{\mathcal{F}}\delta_{\Phi'}$ gilt) UNDX*

Beweis einer Implikation in Theorem 1. Sei $\Phi^0 \xrightarrow{\alpha} \Psi^0$ ein Funktormorphismus. Wir setzen natürlich $\alpha^0 = \alpha$. Seien $\alpha_1, \dots, \alpha_{l-1}$ bereits konstruiert. Jedem Objekt von $\mathcal{A}$ ordnen wir eine Einbettung ein ein injektives Objekt $X \to I$ zu. Für $l > 1$ definiert der Randoperator der langen exakten Kohomologiefolge einen Isomorphismus $\Phi^{l-1}(I/X) \underset{\cong}{\xrightarrow{\delta_\Phi}} \Phi^l X$, für $l = 1$ haben wir statt dessen den etwas komplizierteren Isomorphismus

$$\text{Coker}\big(\Phi^0 I \to \Phi^0(I/X)\big) \underset{\cong}{\xrightarrow{\delta_\Phi}} \Phi^1 X. \tag{+}$$

Für $l > 1$ definieren wir α^l als die Verknüpfung von $\Phi^l X \xrightarrow{\alpha^{l-1}\delta_\Phi^{-1}} \Psi^{l-1}(I/X)$ mit

$$\Psi^{l-1}(I/X) \xrightarrow{\delta_\Psi} \Psi^l X.$$

Für $l = 1$ ist $\Psi^{l-1}(I/X)$ durch $\text{Coker}\big(\Psi^0 I \to \Psi^0(I/X)\big)$ und $\Phi^{l-1}(I/X)$ durch die linke Seite von (+) zu ersetzen.

Wir zeigen durch ein einziges Argument, daß α^l von der Auswahl der Einbettung in ein injektives Obejkt unabhängig ist und daß wir einen Funktormorphismus erhalten haben. Sei dazu $Y \to J$ eine Einbettung in ein injektives Objekt und $X \xrightarrow{\xi} Y$ ein Morphismus. Wir zeigen

$$\Psi^l(\xi)\alpha^l_{X,I} = \alpha^l_{Y,J}\Phi^l(\xi). \tag{\%}$$

Durch Anwendung von (%) auf $\xi = \text{Id}_X$ folgt die Unabhängigkeit von $\alpha^l_{X,I}$ von I und der Einbettung $X \to I$. Eine nochmalige Anwendung des allgemeinen Falles von (%) zeigt, daß wir einen Funktormorphismus $\Phi^l \xrightarrow{\alpha^l} \Psi^l$ erhalten haben. Der Beweis von (%) ist EINFach.

Offenbar ist diese Konstruktion durch die Forderungen an α^l erzwungen, d.h., wenn es überhaupt einen Morphismus kohomologischer δ-Funktoren mit den gewünschten Eigenschaften gibt, so stimmt er mit dem soeben konstruierten α^l überein. Wir müssen uns aber noch davon überzeugen, daß die Folge $(\alpha^l)_{l=0}^\infty$ wirklich ein Morphismus von kohomologischen δ-Funktoren ist. Sei dazu $0 \to X' \to X \to X'' \to 0$ eine exakte Folge. Wir wählen eine Einbettung $X \to I$ in ein injektives Objekt und erhalten so ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}: & 0 \arrow[r] & X' \arrow[r] \arrow[d, "="'] & X \arrow[r] \arrow[d, "i"'] & X'' \arrow[r] \arrow[d, "i''"'] & 0 \\
\mathcal{F}': & 0 \arrow[r] & X' \arrow[r] & I \arrow[r] & I/X' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

mit exakten Folgen als Zeilen. Die Tatsache, daß $\delta_{\Phi,\cdot}$ und $\delta_{\Psi,\cdot}$ natürliche Transformationen auf der Kategorie der kurzen exakten Folgen sind, rechtfertigt die erste und die letzte Zeile in

$$\begin{aligned}
\alpha^{l+1}_{X'}\delta_{\Phi,\mathcal{F}} &= \alpha^{l+1}_{X'}\delta_{\Phi,\mathcal{F}'}\Phi^l(i'') \\
&= \delta_{\Psi,\mathcal{F}'}\alpha^l_{I/X'}\Phi^l(i'') \\
&= \delta_{\Psi,\mathcal{F}'}\Psi^l(i'')\alpha^l_{X''} \\
&= \delta_{\Psi,\mathcal{F}}\alpha^l_{X''}.
\end{aligned}$$

Die zweite Zeile folgt aus der Konstruktion von α^l und die dritte aus der schon bekannten Tatsache, daß die α^l natüliche Transformationen sind. □

Definition 2. Injektive, projektive Auflösung.

Satz 1. *Eindeutigkeit injektiver Auflösungen.*

Satz 2. *Injektive Auflösungen und kurze exakte Folgen.*

Bemerkung 1. Abgeleitete Funktoren bei genügend vielen injektiven Objekten.

Definition 3. Ext

Definition 4. Homologie und Kohomologie.

Fakt 1. H_* als Tor_*, H^* als Ext^*.

Fakt 2. Einschränkung injektiver und projektiver Objekte. $H^*(H, M\,|_H)$ als abgeleiteter Funktor.

Satz 3 (Shapiro)**.** *Kohomologie von* Ind*.*

Folgerung 1. *Kohomologie und Homologie der additiven Gruppe.*

Bemerkung 2. Der Shapiro-Isomorphismus ist mit der langen exakten Kohomologiefolge verträglich.

Definition 5. G_{ab}. CAVE I_G Σ_G.

Bemerkung 3. $G \to G_{\mathrm{ab}}$ ist linksadjungiert zur Einbettung abelscher Gruppen in allgemeine Gruppen.

Satz 4.
- ψ_G $(I_G)_G \cong G_{\mathrm{ab}}$.
- ϕ_G $H_1(G, \mathbb{Z}) \xrightarrow{d\,\cong} H_0(G, I_G) \cong G_{\mathrm{ab}}$.
- *Die Verknüpfung* $\mathrm{Hom}(G, A) \cong H^1(G, A) \xrightarrow{\mathrm{Res}} H^1(H, A) = \mathrm{Hom}(H, A)$ *ist die Einschränkung auf* H*.*

Satz 5. *$H^1(G, M)$ ist Z/B, wobei Z die Menge der $G \xrightarrow{f} M$ mit $f(gh) = f(g) + gf(h)$ (sogenannte* crossed homomorphisms*) und B die Menge aller f der Form $f(g) = gm - m$ ist. Der Isomorphismus ist durch den Randoperator für* $0 \to M \to \mathrm{Ind}^G_{\{1_G\}} M\,\big|_{\{1_G\}} \to Q_M$ *gegeben.*

Folgerung 2. *$H^1(G, M) = \mathrm{Hom}(G, M)$, falls G trivial auf M wirkt.*

Folgerung 3 (Hilberts Theorem 90)**.**

Definition 6. Restriktion, Korestriktion, Inflation, Deflation.

Bemerkung 4. Kohomologisches Cores und homologisches Res gibt es nur für $[G : H] < \infty$, kohomologische Deflation oder homologische Inflation gar nicht.

Satz 6. CoresRes *ist* $[G : H]$*.*

Fakt 3. Falls H ein Normalteiler in G ist, wirkt G/H auf $H^*(H,M)$, und das Bild von $H^*(G,M) \xrightarrow{\text{Res}} H^*(H,M)$ ist in $H^*(H,M)^{G/H}$ enthalten.

Folgerung 4. • *$\#G$ anulliert die höhere Kohomologie.*
• *Die Kohomologie einer endlichen Gruppe mit Werten in einem $\mathbb{Q}$-Vektorraum.*

Definition 7. Verlagerung.

Satz 7. • *$H_{\text{ab}} \cong I_H \to (I_G)_H \xrightarrow{\text{Cores}} (I_G)_G \cong G_{\text{ab}}$ ist der durch $H \to G$ induzierte Morphismus.*
• *Dasselbe gilt für $H_{\text{ab}} \cong H_1(H,\mathbb{Z}) \xrightarrow{\text{Cores}} H_1(G,\mathbb{Z})$.*
Falls $[G:H]$ endlich ist:
• *Die Verknüpfungen $G_{\text{ab}} \cong (I_G)_G \xrightarrow{\text{Res}} (I_G)_H$ und $G_{\text{ab}} \xrightarrow{\text{Verl}} H_{\text{ab}} \cong (I_H)_H \to (I_G)_H$ stimmen überein.*
• *Die Verknüpfung $G_{\text{ab}} \cong H_1(G,\mathbb{Z}) \xrightarrow{\text{Res}} H_1(H,\mathbb{Z}) \cong H_{\text{ab}}$ ist die Verlagerung.*

Beweis. Wir betrachten das folgende kommutative Diagram von H-Moduln:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & I_H \arrow[r, "\subseteq"] \arrow[d, "\subseteq"'] & \mathbb{Z}[H] \arrow[r, "\Sigma_H"] \arrow[d, "\subseteq"'] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, "="'] & 0 \\
0 \arrow[r] & I_G \arrow[r, "\subseteq"] & \mathbb{Z}[G] \arrow[r, "\Sigma_G"] & \mathbb{Z} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

und bezeichnen dessen Zeilen mit $\mathcal{Z}_{1,2}$. Aus dessen Kommutativität folgt für jedes $g \in G$, daß $\text{Res}_H^G \partial_{\mathcal{Z}_2}[g]_G \in (I_G)_H$ das Bild unter $(I_H)_H \to (I_G)_H$ von $\partial_{\mathcal{Z}_1}\text{Res}_H^G[g]_G$ ist. Sei ρ_i eine Vertretermenge von G/H. Wenn $\mu \in M_G$ das Bild von $m \in M$ ist, so ist $\text{Res}_H^G \mu$ das Bild in M_H von $\sum_{i=1}^d \rho_i^{-1} m$. Wir können dies auf $M = I_G$, $\mu = \partial_{\mathcal{Z}_2}[g]_G$ das Bild in $(I_G)_G$ von $m = \delta_g - \delta_{\mathbf{1}}$ anwenden, und $\partial_{\mathcal{Z}_2}\text{Res}_H^G[g]_G$ ist das Bild in $(I_G)_H$ von

$$\sum_{i=1}^{d} \big(\delta_{g\rho_i} - \delta_{\rho_i}\big) = \sum_{i=1}^{d} \big(\delta_{\rho_{j_{i,g}} h_{i,g}} - \delta_{\rho_i}\big) = \sum_{i=1}^{d} \big(\delta_{\rho_{j_{i,g}} h_{i,g}} - \delta_{\rho_{j_{i,g}}}\big) \tag{b}$$

ist, wobei wir die Bezeichnungsweisen von der Definition von Verl übernommen haben. In $(I_G)_H$ haben $\delta_{\rho h} - \delta_h$ und $\delta_\rho - \delta_{\mathbf{1}}$, also auch $\delta_{\rho h} - \delta_\rho$ und $\delta_h - \delta_{\mathbf{1}}$, dasselbe Bild. Also haben (b) und

$$\sum_{i=1}^{d} \big(\delta_{h_{i,g}} - \delta_{\mathbf{1}}\big)$$

dasselbe Bild. Der letzte Ausdruck gehört aber zu I_H und sein Bild in $(I_H)_H$ ist dasselbe wie von $h = h_{1,g} \cdot \ldots \cdot h_{d,g}$, was ein Vertreter in H von $\text{Verl}(g) \in H_{\text{ab}}$ ist. $\square$

Fakt 4. Nach der Identifikation aus Satz 5 entspricht Res der Einschränkung gekreuzter Homomorphismen.

Problem 6 sheet 4. Throughout the following considerations we identify $\mathrm{XHom}(G, M)$ with the set of all $Q^G_{M,G}$ by chosing the representative vanishing at 0 of each element of $Q_{M,G}$. A similar identification is made between $Q^H_{M,H}$ and $\mathrm{XHom}(H, M)$. We consider the following diagram

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d, "="'] & \mathrm{Ind}_{\mathbf{1}}^{G} M \arrow[r] \arrow[d] & Q_{M,G} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & M \arrow[r] & \mathrm{Ind}_{\mathbf{1}}^{H} M \arrow[r] & Q_{M,H} \arrow[r] & 0. \end{tikzcd} \tag{3}$$

By chosing the representative vanishing at 0, we have an identification between $Q^H_{M,G}$ and the set Ξ of all maps $G \xrightarrow{f} M$ satisfying

$$f(gh) = f(g) + gf(h)$$

for $g \in G$ and $h \in H$. Given $h \in H^1(H, M)$, let $\phi \in \mathrm{XHom}(H, M)$ be a preimage of h. Chosing a set $(\rho_i)_{i=1}^d$ of representatives for G/H such that $\rho_1 = \mathbf{1}_G$, we define $G \xrightarrow{f} M$ by

$$f(\rho_i h) = \rho_i \phi(h)$$

for $1 \leq i \leq d$ and $h \in H$. Then $f \in \Xi$ and $f\,|_H = \phi$. Because of (3) , the diagram

$$\begin{tikzcd} Q^H_{M,G} \arrow[d, "f \to f|_H"'] \arrow[dr, "d_{\mathcal{R}_1}"] & \\ G^H_{M,H} \arrow[r, "d_{\mathcal{R}_2}"] & H^1(H, M) \end{tikzcd}$$

commutes where $\mathcal{R}_{1,2}$ are the two rows in (3) . Thus $h = d_{\mathcal{R}_1}(f)$. As $\mathcal{R}_1$ is a short exact sequence of G-modules, this implies $\mathrm{Cores}^H_G h = d_{\mathcal{R}_1,G}\Phi$ where $\Phi = \mathrm{Cores}^H_G f$ is given by

$$\Phi(\gamma) = \sum_{i=1}^{d} (\rho_i f)(\gamma) = \sum_{i=1}^{d} \big(f(\gamma\rho_i) - \gamma f(\rho_i)\big) = \sum_{i=1}^{d} f(\gamma\rho_i)$$

as $f(\rho_i) = \rho_i\phi(\mathbf{1}_G) = 0$. Let $\gamma\rho_i = \rho_{j_{i,\gamma}}\eta_{i,\gamma}$, then $\mathrm{Verl}(\gamma) = \prod_{i=1}^d \eta_{i,\gamma}$ in H_{ab} and

$$\Phi(\gamma) = \sum_{i=1}^{d} \phi(\eta_{i,\gamma}).$$

So far general M could be allowed. But the last line becomes difficult to deal with in this generality. However, if H trivially acts on M then $H \xrightarrow{\phi} M$ is a group homomorphism and the last line becomes

$$\Phi(\gamma) = \phi\big(\mathrm{Verl}\gamma\big)$$

confirming the claim of Problem 6. In fact, we have obtained a somewhat more general result since it is sufficient to assume that H trivially acts on M.

Let the finite Group G trivially act on M, and let h, ϕ and Φ be as above. If $[\gamma]_G$ denotes the image of γ under $G \to G_{\mathrm{ab}} \cong \hat{H}^{-2}(G, \mathbb{Z})$ and a similar notation $[\eta]_H \in H_{\mathrm{ab}}$ is employed for elements of H, then

$$\mathrm{Res}^G_H\big([\gamma]_G\big) \odot \mathrm{Cores}^H_G h = \mathrm{Cores}^H_G\big([\gamma]_G \odot h\big) = \phi(\eta) \tag{4}$$

in $M_{\#G}$, where $\eta \in H$ is such that $\mathrm{Res}^G_H[\gamma]_G = [\eta]_H$. The first equality in (4) is the sixth Point of Exercise sheet 7 Problem 3 and the second one comes from Corollary 1.3.6.b from the lecture and the fact that the diagram

$$\begin{tikzcd}
\hat{H}^{-1}(H, M) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\mathrm{Cores}"'] & M_{\#H} \arrow[d, "\subseteq"] \\
\hat{H}^{-1}(G, M) \arrow[r, "\cong"] & M_{\#G}
\end{tikzcd}$$

commutes, by the fifth point of Exercise Sheet 7 Problem 3. By another application of Corollary 1.3.6.b the left hand side in (4) equals $\phi\big(\mathrm{Verl}\gamma\big) = \Phi(\gamma) = \phi(\eta)$. Since this holds for arbitary group homomorphisms $H \xrightarrow{\phi} M$ with an abelian group M, $\eta = \mathrm{Verl}\gamma$ in H_{ab}, confirming our claim about Verl made in Satz 7 at least in the case of finite groups. The general case can be done by considerations somewhat similar to the ones following (3) above. While I did not give the proof of Satz 7 I have carried this out in the current version of this script, in case you are interested.

1.3. **Tate-Gruppen.**

Definition 1. Schwach zerfallend. Schwach projektiv. Schwach injektiv.

Satz 1. *Äquivalenz dazu, direkter Summand von* ind *bzw.* Ind *zu sein.*

Folgerung 1 (aus dem Satz und (1.1.3))**.** *Wenn P ein schwach projektiver und M ein beliebiger G-Modul ist, so ist $P \otimes M$ ein schwach projektiver G-Modul.*

Folgerung 2 (aus dem Beweis)**.** *Jeder G-Modul ist schwach zerfallender Quotient eines schwach projektiven, und analog für schwache Injektivität.*

Folgerung 3. *Falls G endlich sind, stimmen diese beiden Klassen überein.*

Von nun an setzen wir dies voraus.

Definition 2. Kontrahierbar. Nullhomotop.

Fakt 1. Sei $0 \to M' \to K \to M''$ schwach zerfallend mit kontrahierbarem K.

- Dann ist $M' \xrightarrow{f} T$ genau dann nullhomotop, wenn es zu $K \to T$ ausgedehnt werden kann.
- Dann ist $T \xrightarrow{g} M''$ genau dann nullhomotop, wenn es zu $T \to K$ geliftet werden kann.

Dabei ist die Ausehnbarkeit (bzw. Liftbarkeit) nullhomotoper f (bzw. g) auch dann garantiert, wenn K nicht kontrahierbar ist.

Definition 3. Homotop. $\mathfrak{Ho}_G$.

Folgerung 4. *Homotopie ist in der Tat eine ÄqRel.*

Fakt 2. $\mathfrak{Ho}_G$ ist additiv und hat alle Produkte.

Satz 2. *Sei* $0 \to M' \to K \to M'' \to 0$ *eine kurze exakte Folge mit kontrahierbarem* K *und* $\mathcal{N} : 0 \to N' \to N \to N'' \to 0$ *eine schwach zerfallende kurze exakte Folge.*

- *Jeder Morphismus* $M'' \xrightarrow{f} N''$ *hat einen Lift zu* $K \to N$ *und die Homotopieklasse von* $M' \to N'$ *ist durch die Homotopieglasse von* f *eindeutig bestimmt.*
- *Jeder Morphismus* $N' \xrightarrow{g} M'$ *hat eine Ausdehnung zu* $N \to K$ *und die Homotopieklasse von* $N'' \to M''$ *ist durch die Homotopieklasse von* g *eindeutig bestimmt.*
- *Falls zusätzlich* K *projektiv (bzw. injektiv) ist, so ist die Aussage des ersten (bzw. zweiten) Punktes auch dann richtig, wenn die Folge* $\mathcal{N}$ *nur exakt ist, ohne schwach zu zerfallen.*

Definition 4. Sei $M[1] = \operatorname{Coker}(M \to K)$ und $M[-1] = \operatorname{Ker}(K \to M)$.

Fakt 3. Es handelt sich um Äquivalenzen von Kategorien, die bis auf kanonischen Isomorphismus zueinander invers sind.

Definition 5. Sei $\Omega M = \operatorname{Coker}(M \to M[G])$ und $SM = \operatorname{Ker}(M[G] \to M)$.

Satz 3. Ω *ist linksadjungiert zu* S *und die Morphismen* $\Omega SM \to M \to S\Omega M$*, welche* Id_{SM} *bzw.* $S_{\Omega M}$ *entsprechen, sind Homotopieäquivalenzen. In* $\mathfrak{Ho}_G$ *hat man Isomorphismen* $X[1] \cong \Omega X$ *und* $X[-1] \cong SX$*.*

Beweis. Nach (1.1.1) und (1.1.2) sind die Morphismen $M[G] \xrightarrow{f} N$ und $M \xrightarrow{g} N[G]$ in kanonischer Bijektion zu den Homomorphismen $M \xrightarrow{h} N$ abelscher Gruppen, wobei

$$f(\mu) = \sum_{\gamma \in G} \gamma^{-1} h\big(\mu(\gamma)\big)$$
$$\big(g(m)\big)(\gamma) = h(\gamma m)$$

gilt. Dabei entsprechen die Morphismen von ΩM nach N genau den f, die auf dem Bild von $M \to M[g]$, also für μ von der Form $\mu(\gamma) = \gamma m$, verschwinden. Das ist äquivalent zum Verschwinden von

$$\sum_{\gamma \in G} \gamma^{-1} h(\gamma m)$$

für alle $m \in M$. Die Morphismen von M nach SN entsprechen gerade den g mit

$$\sum_{\gamma \in G} \gamma^{-1}\big(g(m)\big)(\gamma) = 0$$

für alle $m \in M$, was gerade auf dieselbe Bedingung an h hinausläuft. Die übrigen Aussagen folgen nun durch formale Überlegungen (CAVE). □

Bemerkung 1. Wir haben kanonische Isomorphismen abelscher Gruppen $\Omega M \cong M^{\#(G)-1} \cong SM$. Insbesondere sind ΩM und SM als abelsche Gruppen frei, wenn dies auf M zutrifft.

Definition 6. $\hat{H}^p(X) = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{Ho}G}(\mathbb{Z}, X[p]) \cong \mathrm{Hom}_{\mathfrak{Ho}G}(\mathbb{Z}[-p], X)$.

Wir betrachten nun eine kurze exakte Folge

(1) $$\mathcal{X}:\ 0 \to X' \xrightarrow{i} X \xrightarrow{p} X'' \to 0$$

Satz 4. *Sei (1) eine schwach zerfallende kurze exakte Folge. Wir wählen einen schwach zerfallenden Epimorphismus $K \to X$ und einen schwach zerfallenden Monomorphismus $X \to L$ und betrachten das Diagram*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K' \arrow[r] \arrow[d, "\kappa"'] & K \arrow[r] \arrow[d] & X'' \arrow[r] \arrow[d, "="'] & 0 \\
0 \arrow[r] & X' \arrow[r] \arrow[d, "="'] & X \arrow[r] \arrow[d] & X'' \arrow[r] \arrow[d, "\lambda"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & X' \arrow[r] & L \arrow[r] & L'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

In $\mathfrak{Ho}_G$ betrachten wir die Verknüpfungen $k : X''[-1] \cong K' \xrightarrow{\kappa} X'$ und $l : X'' \xrightarrow{\lambda} L'' \cong X'[1]$. Dann stimmt l mit $k[1]$ überein. Insbesondere ist $\bigtriangledown_{\mathcal{X}} := k$ nicht von $K \to X$ und $\bigtriangleup_{\mathcal{X}} := l$ nicht von $X \to L$ abhängig.

Bemerkung 2.
- $\mathfrak{Ho}_G$ ist eine triangulierte Kategorie.
- Wenn X kontrahierbar ist, sind $\bigtriangleup_{\mathcal{X}}$ und $\bigtriangledown_{\mathcal{X}}$ die aus Definition 4 resultierenden Isomorphismen.

Insbesondere bekommen wir einen Morphismus $\hat{H}^p(X'') \xrightarrow{d^{(s)}_{\mathcal{X}}} \hat{H}^{p+1}(X')$ als die Verknüpfung

$$\hat{H}^p(X'') = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{Ho}_G}(\mathbb{Z}, X'') \xrightarrow{(\bigtriangleup_{\mathcal{X}}[p])\circ} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{Ho}_G}(\mathbb{Z}, \mathcal{X}'[p+1]) \cong \hat{H}^{p+1}(X').$$

Es ist aber wünschenswert, diesen Morphismus auch dann zu haben, wenn die Folge $\mathcal{X}$ nicht schwach zerfallend ist. Sei T_p ein als abelsche Gruppe freier G-Modul mit einem Isomorphismus $T_p \cong \mathbb{Z}[-p]$. Zum Beispiel kann wegen Bemerkung 1 CAVE label

$$T_p = \begin{cases} \Omega^{-p}\mathbb{Z} & p < 0 \\ S^p\mathbb{Z} & p \geq 0 \end{cases}$$

mit dem durch Satz 3 erhaltenen Isomorphismus genommen werden. Dann ist $P_p = \mathbb{Z}[T_p]$ ein projektiver G-Modul und wir haben eine kurze exakte Folge

$$\mathcal{T}_p : 0 \to \tilde{T}_{p+1} \xrightarrow{\iota_p} P_p \xrightarrow{\pi_p} T_p \to 0,$$

und $\tilde{T}^{p+1} = ST_p$ ist in $\mathfrak{Ho}_G$ kanonisch isomorph zu $\mathbb{Z}[-p-1]$. Weil T_p eine freie abelsche Gruppe ist, ist $\mathcal{T}_p$ schwach zerfallend. Man prüft leicht hat, daß die Verknüpfung

$$(2)\quad \operatorname{Hom}_{\mathfrak{Ho}_G}(T_p, T_p) \cong \operatorname{Hom}_{\mathfrak{Ho}_G}(\mathbb{Z}[-p], T_p) \cong \hat{H}^p(T_p) \xrightarrow{d^{(s)}_{\mathcal{T}_p}} \hat{H}^{p+1}(\tilde{T}_{p+1}) \cong$$
$$\cong \operatorname{Hom}_{\mathfrak{Ho}_G}(\mathbb{Z}[-p-1], \tilde{T}_{p+1}) \cong \operatorname{Hom}_{\mathfrak{Ho}_G}(\tilde{T}_{p+1}, \tilde{T}_{p+1})$$

Id_{T_p} auf $\operatorname{Id}_{\tilde{T}_{p+1}}$ abbildet. Sei

$$h'' \in \hat{H}^p(X'') \cong \operatorname{Hom}_{\mathfrak{Ho}_G}(T_p, X'')$$

gegeben als die Homotopieklasse von $T_p \xrightarrow{\eta''} X''$. Weil P_p projektiv ist gibt es ein $P_p \xrightarrow{\eta} X$ mit $p\eta = \eta''\Sigma_G$ und η definiert einen Morphismus $P_p \xrightarrow{\eta'} X'$ von G-Moduln, dessen Homotopieklasse nach Satz 2 eindeutig bestimmt ist durch die Homotpieklasse von η'' und damit durch h''.

Definition 7. Sei $d_{\mathcal{X}}h \in \hat{H}^{p+1}(X')$ das Bild der Homotopieklasse von η' unter dem Isomorphismus

$$\operatorname{Hom}_{\mathfrak{Ho}_G}(I_G, X') \cong \operatorname{Hom}_{\mathfrak{Ho}_G}\big(\mathbb{Z}[-p-1], X'\big) \cong \operatorname{Hom}_{\mathfrak{Ho}_G}(\mathbb{Z}, X'[1]) = \hat{H}^1(X').$$

Aus unserer Bemerkung über (2) folgt, daß dies die einzige derartige Familie von $d_{\mathcal{X}}$ ist, welche für schwach zerfallende Folgen mit $d^{(s)}_{\mathcal{X}}$ übereinstimmt und funktoriell auf der Kategorie der kurzen exakten Folgen von G-Moduln ist. Insbesondere hängt $d_{\mathcal{X}}$ nicht von der Wahl der T_p ab.

Satz 5. *Die lange exakte Koho-Folge für Tate-Gruppen.*

Beweis. Wir betrachten den Ausschnitt

$$\hat{H}^p(X') \to \hat{H}^p(X) \to \hat{H}^p(X'') \to \hat{H}^{p+1}(X') \to \hat{H}^{p+1}(X).$$

Zunächst zeigen wir, daß die Verknüpfungen 0 sind, wobei dies an der Stelle $\hat{H}^p(X)$ trivial ist. Für die anderen Stellen übernehmen wir die Bezeichnungsweisen vor Definition 7, insbesondere die Bezeichnungsweisen (1) für die kurze exakte Folge. Weil die Verknüpfung

$$\tilde{T}_{p+1} \xrightarrow{\eta'} X' \to X''$$

auch als $\tilde{T}_{p+1} \to P_p \xrightarrow{\eta} X$ geschrieben werden kann, ist sie nullhomotop. Wenn h'' im Bild von $\hat{H}^p(X)$ liegt, kann η'' so gewählt werden, daß es auch zu einem Morphismus $T_p \to X$ geliftet werden kann. Dessen Verknüpfung mit $P_p \to T_p$ liefert dann ein η, für welches η' verschwindet.

Wenn $dh'' = 0$ ist $\tilde{T}_{p+1} \xrightarrow{\eta'} X'$ nullhomotop und kann nach Fakt 1 zu $P_p \xrightarrow{\eta'_1} X'$ ausgedehnt werden. Dann verschwindet $\eta - i\eta'_1$ auf $\tilde{T}_{p+1}$ und definiert daher einen Morphismus $T_p \to X$, also ein Element von $\hat{H}^p(X)$, dessen Bild in $\hat{H}^p(X'')$ offenbar h'' ist. Für die Exaktheit in $\hat{H}^{p+1}(X')$ gehen wir von $\tilde{T}_{p+1} \xrightarrow{\eta'} X'$ aus, so daß $i\eta'$ nullhomotop ist, also nach Fakt 1 zu $P_p \xrightarrow{\eta} X$ ausgedehnt werden kann. Dann definiert η einen Morphismus $T_p \xrightarrow{\eta''} X''$, also ein $h'' \in \hat{H}^p(X'')$, so daß $d_{\mathcal{X}} h$ durch η' gegeben ist.

Für die Exaktheit in $\hat{H}^p(X)$ betrachten wir $T_p \xrightarrow{\xi} X$, so daß $p\xi$ nullhomotop ist, also nach Fakt 1 zu $P_p \xrightarrow{n''} X''$ ausgedehnt werden kann. Auf Grund der Projektivität von P_p gibt es $P_p \xrightarrow{n} X$ mit $n'' = pn$. Wir dürfen ξ durch $\xi - n\pi_p$ ersetzen und haben dann $p\eta = 0$. Dann gibt es genau ein $T_p \xrightarrow{\eta'} X'$ mit $i\eta' = \eta$. $\square$

Beispiel 1. Wir haben $\mathrm{Hom}_G(\mathbb{Z}, M) = M^G$ wobei nach Fakt 1 die nullhomotopen genau die auf $\mathbb{Z}[G]$ ausdehnbaren Homomorphismen sind. Nach Frobenius-Reziprozität ist $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}[G], M) \cong M$ wobei der zu m gehörende Morphismus $f \in \mathbb{Z}[G]$ auf $\sum_g f(g)g^{-1}m$ abbildet. Wenn f die konstante Funktion 1 ist, wird dies genau zu $\mathrm{Tr}m$. Also

$$\hat{H}^0 = \mathrm{Coker}(M_G \xrightarrow{\mathrm{Tr}} M^G). \tag{3}$$

Beispiel 2. Wir haben $\hat{H}^{-1} \cong \mathrm{Hom}_{\mathfrak{Ho}_G}(\mathbb{Z}[1], M)$. Wenn $\mathbb{Z}[1]$ als $\mathrm{Coker}\big(\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}[G]\big) = Q_G$ gebildet wird,

(a) $\quad \mathrm{Hom}_G\big(\mathbb{Z}[1], M\big) \cong \mathrm{Ker}\big(\mathrm{Hom}_G(\mathbb{Z}[G], M) \to \mathrm{Hom}_G(\mathbb{Z}, M)\big) = \mathrm{Ker}(M \xrightarrow{\mathrm{Tr}} M^G).$

Nach Fakt 1 sind die nullhomotopen genau die zu $\mathbb{Z}[1] \to M[G]$ liftbaren. Anwendung von (a) auf $M[G]$ statt M gibt

$$\mathrm{Hom}_G\big(\mathbb{Z}[1], M[G]\big) \cong \mathrm{Ker}\Big(M[G] \xrightarrow[g]{f \to \sum f(g)} M\Big) \tag{b}$$

wobei die Abbildung von (b) nach (a) durch $M[G] \to M$, $f \to \sum_{g\in G} g^{-1}f(g)$ gegeben ist, deren Bild gerade $\mathrm{Ker}(M \to M_G)$ ist. Also gilt

$$\hat{H}^{-1}(M) = \mathrm{Ker}(M_G \xrightarrow{\mathrm{Tr}} M^G) \tag{4}$$

Folgerung 5. *Für $i > 0$ haben wir kanonische Isomorphismen $H^i(M) \cong \hat{H}^i(M)$ und $H_i(M) \cong \hat{H}^{-i-1}(M)$.*

Bemerkung 3. Rand $\hat{H}^{-1}(M'') \to \hat{H}^0(M')$.

Beispiel 3. Wir haben eine Bijektion zwischen den Homomorphismen $I_G \xrightarrow{f} M$ abelscher Gruppen und den Abbildungen $G \xrightarrow{\phi} M$ mit $\phi(\mathbf{1}) = 0$, indem $\phi(g) = f(\delta_{g^{-1}} - \delta_{\mathbf{1}})$ und $f(\lambda) = \sum_{g\in G} \lambda(g)\phi(g^{-1})$ gesetzt wird. Dabei entsprechen die G-äquivarianten f genau den ϕ mit $\phi(gh) = \phi(g) + g\phi(h)$, also den Elementen von $\mathrm{XHom}(G, M)$. Nach Fakt 1 ist f genau dann nullhomotop, wenn es zu einem Morphismus $\mathbb{Z}[G] \to M$ von G-Moduln ausgedehnt werden kann. Ein solcher Morphismus hat nach (1.1.2) die Form $f(\lambda) = \sum_{\gamma\in G} \lambda(\gamma)\gamma^{-1}m$ mit einem eindeutig bestimmten m, entsprechend $\phi(g) = g(m) - m$. Wir erhalten eine neue Herleitung von Satz 1.2.5.

Satz 6. *Sei*

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & X' \arrow[r, "i_X"] \arrow[d, "j'"'] & X \arrow[r, "p_X"] \arrow[d, "j"'] & X'' \arrow[r] \arrow[d, "j''"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & Y' \arrow[r, "i_Y"] \arrow[d, "q'"'] & Y \arrow[r, "p_Y"] \arrow[d, "q"'] & Y'' \arrow[r] \arrow[d, "q''"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & Z' \arrow[r, "i_Z"] \arrow[d] & Z \arrow[r, "p_Z"] \arrow[d] & Z'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

ein kommutatives Diagramm von G-Moduln mit exakten, schwach spaltenden Zeilen und Spalten. Dann haben wir ein in in $\mathfrak{Ho}_G$ antikommutatives Diagramm

(5)
$$\begin{tikzcd}
Z'' \arrow[r] \arrow[d] & Z'[1] \arrow[d] \\
X''[1] \arrow[r] & X'[2]
\end{tikzcd}$$

Beweis. Wir betrachten einen schwach spaltenden Monomorphismus $X' \xrightarrow{\kappa} K$ und einen schwach spaltenden Epimorphismus $L \xrightarrow{\lambda} Z''$. Diese induzieren Isomorphismem

(a)
$$X'[1] \cong A$$

und

$$Z''[-1] \cong B$$

in $\mathfrak{Ho}_G$, wobei wir mit $K \xrightarrow{\alpha} A$ einen Coker(κ) und mit $B \xrightarrow{\beta} L$ einen Ker(λ) bezeichnet haben. Weil K (bzw. L) schwach injektiv (bzw. projektiv) ist, gibt es Morphismen von G-Moduln $Y \xrightarrow{e} K$ (bzw. $L \xrightarrow{s} Y$) mit $eji_X = \kappa$ (bzw. $q''p_Y s = \lambda$). Auf Grund der universellen Eigenschaften von X'' als Coker(i_X) und Ker(q'') sowie von Z' als Coker(j') sowie Ker(p_Z) gibt es eindeutige Morphismen $X'' \xrightarrow{a_X} A \xleftarrow{a_Z} Z'$ mit $a_X p_X = \alpha ej$ und $a_Z q' = \alpha e i_Y$ sowie $X'' \xleftarrow{b_X} B \xrightarrow{b_Z} Z'$ mit $j'' b_X = p_Y s\beta$ und $i_Z b_X = qs\beta$. Wenn σ die Summe der beiden Wege von der linken oberen nach der rechten unteren Ecke in (5) ist, so gilt $\sigma[-1] = a_X b_X + a_Z b_Z$ unter der Identifkation (a). Weil die rechte Seite in

(b) $$a_X b_X + a_Z b_Z = \alpha e s \beta$$

sich über die kontrahierbaren K und L faktorisiert, ist sie nullhomotop, und die Behauptung folgt. Zum Beweis von (b) sei $t \in B$ und $y = s(t)$. Wenn $x \in X$ mit $p_X(x) = b_X(t)$ gewählt wird, so gilt $p_Y\big(y - j(x)\big) = 0$. Es gibt also ein $y' \in Y'$ mit $y = j(x) + i_Y(y')$, und man prüft leicht $b_Z(t) = q'(y')$. Es kommt

$$(a_X b_X + a_Z b_Z)(t) = a_X p_X(x) + a_Z q'(y') = \alpha e j(x) + \alpha e i_Y(y') = \alpha e(y) = \alpha e s(t)$$

und (b) folgt. □

Seien A und B G-Moduln. Wir wählen schwach zerfallende Monomorphismen $A \to K$ und $B \to L$ mit kontrahierbaren K und L und haben kurze exakte Folgen

$$0 \to A \to K \to A' \to 0,$$

$$0 \to B \to L \to B' \to 0$$

$$0 \to A \otimes B \to K \otimes B \to A' \otimes B$$

$$0 \to A \otimes B \to A \otimes L \to A \otimes B'$$

wobei $K \otimes B$ und $A \otimes L$ nach Folgerung 1 kontrahierbar sind. Diese Folgen definieren Isomorphismen $A' \cong A[1]$, $B' \cong B[1]$, $A' \otimes B \cong (A \otimes B)[1] \cong A \otimes B'$ in der Homotopiekategorie, also $A[1] \otimes B \xrightarrow{{}_1\iota} (A \otimes B)[1] \xleftarrow{\iota_1} A \otimes (B[1])$. Ähnlich gehen ${}_{-1}\iota$ und ι_{-1}, und durch Iteration bekommt man ${}_k\iota$ und ι_k für alle $k \in \mathbb{Z}$.

Zusammen mit Folgerung 1 folgt

Satz 7. *Falls zwei Morphismen $A \xrightarrow{f,\,g} B$ von G-Moduln homotop sind, so sind auch $f \otimes \mathrm{Id}_M$ und $g \otimes \mathrm{Id}_M$ homotop. Ähnliches gilt für den zweiten Tensorfaktor, man kann $\otimes$ also als Funktor $\mathfrak{Ho}_G \times \mathfrak{Ho}_G \to \mathfrak{Ho}_G$ betrachen. Wir haben Funktorisomorphismen*

(6) $$A \otimes (B[p]) \xleftarrow{\iota_p} (A \otimes B)[p] \xrightarrow{{}_p\iota} A[p] \otimes B,$$

und das mit diesen Isomorphimen gebildete Diagramm

(7) $$\begin{array}{ccc} A[p] \otimes B[q] & \xrightarrow{{}_p\iota} & \big(A \otimes B[q]\big)[p] \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \iota_q} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \iota_q} \\ \big(A[p] \otimes B\big)[q] & \xrightarrow{{}_p\iota} & (A \otimes B)[p+q] \end{array}$$

kommutiert bis auf einen Faktor $(-1)^{pq}$.

Wir definieren das Produkt $\alpha \odot \beta$ zweier Kohomologieklassen $\alpha \in \hat{H}^p(A)$, $\beta \in \hat{H}^q(B)$ als die Verknüpfung

$$\mathbb{Z}[-p-q] \xrightarrow{(\iota_{-q-p}\iota)^{-1}} \mathbb{Z}[-p] \otimes \mathbb{Z}[-q] \xrightarrow{\alpha \otimes \beta} A \otimes B.$$

Direkt aus den Definitionen erhält man ziemlich leicht

$$\mathcal{A}_{A,B,C}\big((\alpha \odot \beta) \odot \gamma\big) = \alpha \odot (\beta \odot \gamma) \tag{8}$$

wobei $\mathcal{A}_{A,B,C}$ den Isomorphismus $(A \otimes B) \otimes C \cong A \otimes (B \otimes C)$ sowie dessen Wirkung auf den Tategruppen bezeichnet. Aus (7) folgt weiterhin

$$\beta \odot \alpha = (-1)^{pq} \iota_{A,B}(\alpha \odot \beta), \tag{9}$$

wobei $A \otimes B \xrightarrow{\iota_{A,B}} B \otimes A$ die beiden Tensorfaktoren vertauscht und der durch diesen Isomorphismus definierte Isomorphismus zwischen Tate-Gruppen ebenfalls mit $\iota_{A,B}$ bezeichnet wurde. Wir betrachten eine kurze exakte Folge (1) und $h'' \in \hat{H}^p(X'')$. Wir setzen voraus, daß $\mathcal{X} \otimes B$ exakt bleibt. Um das Verhalten von $\odot$ unter $d_{\mathcal{X}\otimes B}$ zu klären, wenden die Konstruktion vor Definition 7 an. Dann ist $d_{\mathcal{X}} h''$ durch die Homtopieklasse von $\tilde{T}_{p+1} \xrightarrow{\eta'} X'$ gegeben. Zur Berechnung von $d_{\mathcal{X}\otimes B}(h'' \odot \beta)$ kann dieselbe Konstruktion mit $T_p \otimes T_q \xrightarrow{\iota_{-q-p}\iota} \mathbb{Z}[-p-q]$ anstelle $T_p \cong \mathbb{Z}[-p]$ und $\mathcal{T}_p \otimes T_q$ anstelle $\mathcal{T}_p$ verwendet werden. Dann ist $d_{\mathcal{X}\otimes B}(h'' \otimes \beta)$ durch

$$\tilde{T}_{p+1} \otimes T_q \xrightarrow{\eta' \otimes \beta} X' \otimes B$$

gegeben. Aus den Definitionen folgt, daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
(T_p \otimes T_q)[-1] \arrow[r, "\nabla_{\mathcal{T}_p \otimes T_q}"] \arrow[d] & \tilde{T}_{p+1} \otimes T_q \arrow[r] & \mathbb{Z}[-p-1] \otimes \mathbb{Z}[-q] \arrow[dl, "\iota_{-q-p-1}\iota"] \\
(\mathbb{Z}[-p] \otimes \mathbb{Z}[-q])[-1] \arrow[r, "(\iota_{-q-p}\iota)[-1]"] & \mathbb{Z}[-p-q-1] &
\end{tikzcd}$$

kommutiert. Es folgt

$$d_{\mathcal{X}\otimes B}(h'' \odot \beta) = (d_{\mathcal{X}} h'') \odot \beta. \tag{10}$$

Unter Verwendung von (9) oder durch eine analoge, aber etwas kompliziertere Rechnung folgt

$$d_{B\otimes\mathcal{X}}(\beta \odot h'') = (-1)^q \beta \odot (d_{\mathcal{X}h''}) \tag{11}$$

Satz 8. *Es gibt genau ein Produkt $\odot$ wie zuvor, mit den Eigenschaften der Funktorialität sowie (10) und (11) und mit dem offensichtlichen Verhalten für $p = q = 0$.*

Satz 9. *Unter den Identifikationen $\hat{H}^1(M) \cong \operatorname{Coker}\big(M \to \operatorname{XHom}(G, M)\big)$ (Beispiel 3) sowie $\hat{H}^{-1}(N) \cong \operatorname{Ker}(N_G \xrightarrow{\operatorname{Tr}_G} N^G)$ (4) und $\hat{H}^0(M \otimes N) \cong \operatorname{Coker}\big(M \otimes N \xrightarrow{\operatorname{Tr}_G} (M \otimes N)^G\big)$ wird*

$$\hat{H}^1(M) \times \hat{H}^{-1}(N) \xrightarrow{\odot} \hat{H}^0(M \otimes N)$$

mit

$$\text{(12)} \qquad \mathrm{XHom}(G,M) \times \mathrm{Ker}(N_G \xrightarrow{\mathrm{Tr}_G} N^G) \to \mathrm{Coker}\big(M \otimes N \xrightarrow{\mathrm{Tr}_G} (M \otimes N)^G\big)$$

$$\big(f,n\big) \to \sum_{\gamma \in G} f(\gamma) \otimes \gamma(n)$$

identifiziert.

Beweis. Wie bei der Herleitung von (4) sei Q_G der Kokern von $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}[G]$. Sei $a \in I_G \otimes Q_G$ das Bild von $\sum_{g \in G}(\delta_g - \delta_{\mathbf{1}}) \otimes \delta_g$ unter $I_G \otimes \mathbb{Z}[G] \to I_G \otimes \mathbb{Q}[G]$. Wir behaupten, daß $\mathbb{Z} \xrightarrow{I}_G \otimes Q_G$ mit dem Inversen von

$$\text{(a)} \qquad I_G \otimes Q_G \cong \mathbb{Z}[-1] \otimes \mathbb{Z}[1] \xrightarrow{\iota_1 {}_{-1}\iota} \mathbb{Z}$$

übereinstimmt. Die in Beispiel 3 konstruierte Bijektion bildet $f \in \mathrm{XHom}(G,M)$ auf die durch

$$I_G \xrightarrow{\mu} M$$
$$\mu(\lambda) = \sum_{\gamma \in G \setminus \{\mathbf{1}\}} \lambda(\gamma) f(\gamma)$$

definierte Kohomologieklasse ab. Das Bild von $n \in \mathrm{Ker}(N \xrightarrow{\mathrm{Tr}_G} N)$ unter (4) ist die durch

$$Q_G \xrightarrow{\nu} N$$
$$\nu(\lambda \bmod \mathbb{Z}) = \sum_{\gamma \in G} \lambda(\gamma)\gamma n$$

definierte Kohomologieklasse. Auf Grund unserer Behauptung über (a) ist das Produkt dieser Kohomologieklassen durch $I_G \otimes Q_G \xrightarrow{\mu \otimes \nu} M \otimes N$ gegeben. Das Bild von a unter dieser Abbildung ist $\sum_{\gamma \in G} f(\gamma) \otimes \gamma(n)$ in Übereinstimmung mit unserer Behauptung.

Zum Beweis unserer Behauptung über (a) betrachten wir

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, "a"'] & \mathbb{Z}[G] \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] & Q_G \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Id}_{Q_G}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & I_G \otimes Q_G \arrow[r] & \mathbb{Z}[G] \otimes Q_G \arrow[r] & Q_G \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Wenn $\mathcal{Z}_1$ und $\mathcal{Z}_2$ die obere und untere Zeile bezeichnen, so ist $I_G \otimes Q_G \xrightarrow{\nabla_{\mathcal{Z}_2}} Q_G[-1]$ gerade ${}_{-1}\iota$ in (a), wogegen $Q_G[-1] \xrightarrow{\triangle_{\mathcal{Z}_2}} \mathbb{Z}$ gerade ι_1 ist. Die Behauptung folgt. □

Folgerung 6. *Wir setzen voraus, daß G trivial auf A wirkt. Für $\chi \in \mathrm{Hom}(G,A)$ sei $[\chi] \in \hat{H}^1(G,A)$ dessen Bild unter der Identifikation aus Beispiel 3.*

- *Für $g \in G$ sei $[\delta_g - \delta_{\mathbf{1}}]$ das Bild von $\delta_g - \delta_{\mathbf{1}}$ in $(I_G)_G \cong \hat{H}^{-1}(I_G)$. Unter der Identifikation $\hat{H}^0(A \otimes I_G) \cong A_{\#G}$, $f \in (A \otimes I_G)^G \to f(\mathbf{1})$, haben wir $[\chi] \odot [\delta_g - \delta_{\mathbf{1}}] = -\chi(g)$.*
- *$\chi(g) \in A_{\#G}$ ist das Produkt aus $[g] \in \hat{H}^{-2}(G,Z)$ und $[\chi] \in \hat{H}^1(G,A)$.*

- *Für $A = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ ist $\#G\chi(g) \in \mathbb{Z}/\#G\mathbb{Z}$ auch das Produkt aus $[g]$ und $d[\chi] \in \hat{H}^2(G,\mathbb{Z})$.*

Für $H \subseteq G$ sind die Einschränkung auf H und Ind_H^G als Funktoren zwischen den Kategorien der G-Moduln und der H-Moduln zueinander adjungiert. Beide erhalten offenbar schwach spaltende Mono- und Epimorphismen und daher auch schwach injektive und projektive Objekte. Es folgt

Satz 10. *$\cdot|_H$ und Ind_H^G definieren Funktoren zwischen $\mathfrak{Ho}_G$ und $\mathfrak{Ho}_H$, die mit $[k]$ verträglich sind und die Adjunktionsbeziehungen (1.1.1) und (1.1.2) erfüllen. Wir haben kanonische Isomorphismem $\mathbb{Z}[k]_G|_H \cong \mathbb{Z}[k]_H$ sowie Morphismen $\mathrm{Ind}_H^G\mathbb{Z}[k]_H \to \mathbb{Z}[k]_G \to \mathrm{Ind}_H^G\mathbb{Z}[k]_H$.*

Die formulierte Adjunktionsbeziehung impliziert insbesondere $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{Ho}_G}(\mathbb{Z}, \mathrm{Ind}_H^G M) \cong \mathrm{Hom}_{\mathfrak{Ho}_H}(\mathbb{Z}, M$ Da Ind_H^G auch mit $[p]$ für G und H verträglich ist, folgt

Folgerung 7. *Wir haben einen kanonischen Isomorphismus*

$$\hat{H}^*(G, \mathrm{Ind}_H^G M) \cong \hat{H}^*(G, M). \tag{13}$$

Satz 11. *Sei L/K eine endliche Galois-Erweiterung mit Galois-Gruppe G.*

- *Der G-Modul $(L,+)$ ist kontrahierbar.*
- *Es gilt $\hat{H}^*\big(L/K,(L,+)\big) = 0$.*

Falls M ein G-Modul ist, liefert die Verknüpfung von (13) mit den Morphismen $\mathrm{Ind}_H^G M \to M \to \mathrm{Ind}_H^G M$ kanonische Morphismen $\hat{H}^*(H,M) \xrightarrow{\mathrm{Cores}} \hat{H}^*(G,M)$ als die Verknüpfung

$$\hat{H}^*(H,M) \cong \hat{H}^*(G, \mathrm{Ind}_H^G M) \to \hat{H}^*(G,M)$$

und $\hat{H}^*(G,M) \xrightarrow{\mathrm{Res}} \hat{H}^*(H,M)$

$$\hat{H}^*(G,M) \to \hat{H}^*(G, \mathrm{Ind}_H^G M) \cong \hat{H}^*(H,M).$$

Da $M \to \mathrm{Ind}_H^G M \to M$ mit der Multiplikation $[G:H]\cdot$ übereinstimmt, folgt der erste Teil von

Satz 12. • *Es gilt*

$$\mathrm{Cores}_G^H \mathrm{Res}_H^G = [G:H]\cdot \qquad \text{auf } \hat{H}^*(G,M) \tag{14}$$

- *Es gilt $\mathrm{Res}_I^G = \mathrm{Res}_I^H \mathrm{Res}_H^G$ und die analoge Relation die Korestriktion erfüllen.*
- Res *und* Cores *auf $\hat{H}^0$ und $\hat{H}^{-1}$.*
- *Es gilt*

$$\mathrm{Res}(a \odot b) = \mathrm{Res}(a) \odot \mathrm{Res}(b). \tag{15}$$

- *Es gilt*

$$\begin{aligned} \mathrm{Cores}\big(a \odot \mathrm{Res}(b)\big) &= \mathrm{Cores}(a) \odot b \\ \mathrm{Cores}\big(\mathrm{Res}(a) \odot b\big) &= a \odot \mathrm{Cores}(b). \end{aligned} \tag{16}$$

Folgerung 8. *$\#G$ anulliert $\hat{H}^*(G,M)$. Insbesondere verschwindet $\hat{H}^*(G,M)$, falls $M \xrightarrow{(\#G)\cdot} M$ bijektiv ist, zum Beispiel für $\mathbb{Q}$-Vektorräume.*

Bemerkung 4. Anderer Beweis Kohomologie additiver Gruppe in Charakteristik 0.

1.4. **Kohomologie zyklischer Gruppen.** Sei G zyklisch von der Ordnung n mit Erzeuger σ.

Satz 1. *Dann ist $H^*(G,M)$ die Kohomologie des Komplexes*

$$0 \to \underline{M} \xrightarrow{\sigma - \mathrm{Id}_M} M \xrightarrow{T} M \xrightarrow{\sigma - \mathrm{Id}_M} M \xrightarrow{T} \dots, \tag{1}$$

$H_*(G,M)$ die Homologie des Komplexes

$$0 \leftarrow \underline{M} \xleftarrow{\sigma - \mathrm{Id}_M} M \xleftarrow{T} M \xleftarrow{\sigma - \mathrm{Id}_M} M \xleftarrow{T} \dots \tag{2}$$

und $\hat{H}^*(G,M)$ die Kohomologie des Komplexes

$$\dots \to M \xrightarrow{\sigma - \mathrm{Id}_M} M \xrightarrow{T} \underline{M} \xrightarrow{\sigma - \mathrm{Id}_M} M \xrightarrow{T} M \xrightarrow{\sigma - \mathrm{Id}_M} M \xrightarrow{T} \dots, \tag{3}$$

wobei sich jeweils der unterstrichene Term im homologischen bzw. kohomologischen Grad 0 *befindet. Insbesondere haben wir Isomorphismen*

$$\hat{H}^p(G,M) \xrightarrow{\iota_{p,\sigma}} \begin{cases} M^G/\mathrm{Bild}(T) & q \equiv 0 \bmod 2 \\ \mathrm{Ker}(T)/\mathrm{Bild}(\sigma - \mathrm{Id}) & q \equiv 1 \bmod 2 \end{cases} \tag{4}$$

Bemerkung 1. Es gilt $\iota_{p,\sigma^m} = m^{\lceil \frac{p}{2} \rceil}\iota_{p,\sigma}$.

Fakt 1. Für $[\sigma] \in \hat{H}^{-2}(G,\mathbb{Z})$ gilt $\iota_{p,\sigma}[\sigma] = 1 \bmod n$.

Fakt 2. Sei l ein Teiler von n, $H = l\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ und $G \xrightarrow{\pi} G/H$ die Projektion und M ein G/H-Modul. Dann definiert der folgende Morphismus von Kokettenkomplexen $\mathrm{Infl}_G^{G/H}$ auf $H^*(G/H,M)$:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "\sigma-\mathrm{Id}_M"] \arrow[d, "\mathrm{Id}_M"'] & M \arrow[r, "\mathrm{Tr}_{G/H}"] \arrow[d, "\mathrm{Id}_M"'] & M \arrow[r, "\sigma-\mathrm{Id}_M"] \arrow[d, "l\cdot"'] & M \arrow[r, "\mathrm{Tr}_{G/H}"] \arrow[d, "l\cdot"'] & M \arrow[r, "\sigma-\mathrm{Id}_M"] \arrow[d, "l^2\cdot"'] & M \arrow[r, "\mathrm{Tr}_{G/H}"] \arrow[d, "l^2\cdot"'] & \cdots \\ 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "\sigma-\mathrm{Id}_M"] & M \arrow[r, "\mathrm{Tr}_G"] & M \arrow[r, "\sigma-\mathrm{Id}_M"] & M \arrow[r, "\mathrm{Tr}_G"] & M \arrow[r, "\sigma-\mathrm{Id}_M"] & M \arrow[r, "\mathrm{Tr}_G"] & \cdots . \end{tikzcd} \tag{5}$$

Insbesondere gilt

$$\mathrm{Infl}_G^{G/H}\iota^{-1}_{2p,\pi(\sigma)}m = l^p\iota^{-1}_{2p,\sigma}m$$

für $m \in M^{G/H} = M^G$ und $p > 0$ sowie

$$\mathrm{Infl}_G^{G/H}\iota^{-1}_{2p+1,\pi(\sigma)}m = l^p\iota^{-1}_{2p+1,\sigma}m$$

für $m \in \mathrm{Ker}(M \xrightarrow{T_{G/H}} M) \subseteq \mathrm{Ker}(M \xrightarrow{T_G} M)$.

Fakt 3. In der Situation von Fakt 2 sind Res_H^G und Cores_G^H durch die folgenden Morphismen von Kokettenkomplexen gegeben.

$$
\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "\mathrm{Tr}_G"] & M \arrow[r, "\sigma-\mathrm{Id}_M"] \arrow[d, "\mathrm{Id}_M"'] & M \arrow[r, "\mathrm{Tr}_G"] \arrow[d, "\sum_{j=0}^{l-1}\sigma^j"'] & M \arrow[r, "\sigma-\mathrm{Id}_M"] \arrow[d, "\mathrm{Id}_M"'] & M \arrow[r, "\mathrm{Tr}_G"] \arrow[d, "\sum_{j=0}^{l-1}\sigma^j"'] & M \arrow[r, "\sigma-\mathrm{Id}_M"] \arrow[d, "\mathrm{Id}_M"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "\mathrm{Tr}_H"] & M \arrow[r, "\sigma^l-\mathrm{Id}_M"] \arrow[d, "\sum_{j=0}^{l-1}\sigma^j"'] & M \arrow[r, "\mathrm{Tr}_H"] \arrow[d, "\mathrm{Id}_M"'] & M \arrow[r, "\sigma^l-\mathrm{Id}_M"] \arrow[d, "\sum_{j=0}^{l-1}\sigma^j"'] & M \arrow[r, "\mathrm{Tr}_H"] \arrow[d, "\mathrm{Id}_M"'] & M \arrow[r, "\sigma^l-\mathrm{Id}_M"] \arrow[d, "\sum_{j=0}^{l-1}\sigma^j"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "\mathrm{Tr}_G"] & M \arrow[r, "\sigma-\mathrm{Id}_M"] & M \arrow[r, "\mathrm{Tr}_G"] & M \arrow[r, "\sigma-\mathrm{Id}_M"] & M \arrow[r, "\mathrm{Tr}_G"] & M \arrow[r, "\sigma-\mathrm{Id}_M"] & \cdots .
\end{tikzcd}
\tag{6}
$$

Satz 2. *Sei*

$$a \star b = \sum_{i=0}^{n-2} \sum_{j=i+1}^{n-1} \sigma^i(a) \otimes \sigma^j(b). \tag{7}$$

Bei der Darstellung von Kohomologieklassen der zyklischen Gruppe durch den zyklischen Komplex gilt

$$[a] \cdot [b] = \begin{cases} [a \otimes b] & \text{falls wenigstens einer der Faktoren geraden Grad hat} \\ [a \star b] & \text{falls beide Faktoren ungeraden Grad haben} \end{cases} \tag{8}$$

Beweis.

$$
\begin{aligned}
a \star b + \sigma_{B,A}(b \star a) &= T(a) \otimes T(b) - T(a \otimes b) \\
(\sigma a - a) \star b &= T(a \otimes b) - a \otimes Tb \\
a \star (\sigma b - b) &= T(a) \otimes b - T(a \otimes \sigma b) \\
\sigma(a \star b) - a \star b &= T(a) \otimes b - a \otimes Tb
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a \star (\sigma b - b) &= -T\big(a \otimes (\sigma b - b)\big) - \sigma_{B,A}\big((\sigma b - b) \star a\big) \\
&= -T\big(a \otimes (\sigma b - b)\big) - \sigma_{B,A}\big(T(b \otimes a) - b \otimes Ta\big) = T(a) \otimes b - T(a \otimes \sigma b).
\end{aligned}
$$

$\square$

Folgerung 1. $\iota_{p-2,\sigma}^{-1} \iota_{p,\sigma}$ *ist Multiplikation mit* $[\sigma] \in \hat{H}^{-2}(G, \mathbb{Z})$.

Definition 1. q_H.

Fakt 4.
- Multiplikativität.
- Wenn M endlich ist, gilt $q_H(M) = 1$.

Folgerung 2. *Für eine Erweiterung endlicher Körper verschwinden* $\hat{H}^*(L/K, L^*)$ *und* $\hat{H}^*(L/K, L)$.

Satz 3. *Seien* Γ *und* Γ' *zwei* G*-invariante Gitter in demselben endlichdemensionalen* $\mathbb{R}$*-Vektorraum* V *mit* G*-Wirkung. Dann ist* Γ *isomorph zu einer Untergruppe von endlichem Index in* Γ'*. Insbesondere gilt* $q_H(\Gamma) = q_H(\Gamma')$*.*

Bemerkung 2. Übrigens ist $q_H(\Gamma)$ durch

$$q_H(\Gamma) = \frac{n^{\dim V^G}}{\left|\det\left(\sigma - \mathrm{Id} \mid V/V^G\right)\right|} \tag{9}$$

gegeben.

1.5. **Kohomologische Trivialität.**

Satz 1. *Sei* G *eine* p*-Gruppe und* M *ein* $\mathbb{F}_p$*-Vektorraum mit* G*-Wirkung. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

- $M = 0$
- $H^0(G, M) = 0.$
- $H_0(G, M) = 0.$

Lemma 1. *Sei* G *eine* p*-Gruppe und* M *ein* $\mathbb{F}_p$*-Vektorraum mit* G*-Wirkung. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

- $H^1(G, M) = 0$
- $M \cong \mathrm{Ind}^G_{\{\mathbf{1}_G\}} M^G$ *(nicht kanonisch).*

Satz 2. *Sei* G *eine* p*-Gruppe und* M *ein* $\mathbb{F}_p$*-Vektorraum mit* G*-Wirkung. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

- $\hat{H}^k(G, M) = 0$ *für ein* k*.*
- M *ist kontrahierbar.*
- $\hat{H}^k(G, M) = 0$ *für alle* k*.*
- $M \cong \mathrm{Ind}^G_{\{\mathbf{1}_G\}} M^G$ *(nicht kanonisch).*

Satz 3. *Sei* G *eine* p*-Gruppe und* M *eine abelsche Gruppe mit* G*-Wirkung. Wenn eine ganze Zahl* k *mit* $\hat{H}^k(G, M) = 0 = \hat{H}^{k+1}(G, M)$ *gefunden werden kann, so gilt* $\hat{H}^r(H, M) = 0$ *für alle* r *und jede Untergruppe* H *von* G*.*

Satz 4. *Sei* G *eine* p*-Gruppe und* $M \xrightarrow{\mu} M$ *ein Morphismus in der Kategorie der abelschen Gruppen mit* G*-Wirkung. Wenn eine ganze Zahl* k *gefunden werden kann, so daß* $\hat{H}^r(G, M) \xrightarrow{\mu} \hat{H}^r(G, N)$ *surjektiv für* $r = k - 1$*, bijektiv für* $r = k$ *und injektiv für* $r = k + 1$ *ist, so definiert* μ *einen Isomorphismus* $\hat{H}^r(H, M) \xrightarrow{\cong} \hat{H}^r(H, N)$ *für beliebige kohomologische Grade* r *und beliebige Untergruppen* H *von* G*.*

Satz 5. *Sei* G *eine endliche Gruppe und* M *eine abelsche Gruppe mit* G*-Wirkung. Wenn für jede Primzahl* p *eine ganze Zahl* k_p *mit* $\hat{H}^{k_p}(S_p, M) = 0 = \hat{H}^{k_p+1}(S_p, M)$ *gefunden werden kann, so gilt* $\hat{H}^r(H, M) = 0$ *für alle* r *und jede Untergruppe* H *von* G*.*

Definition 1. Wir nennen ein solches M *kohomologisch trivial.*

Satz 6. *Sei G eine endliche Gruppe und $M \xrightarrow{\mu} M$ ein Morphismus in der Kategorie der abelschen Gruppen mit G-Wirkung. Wenn für jede Primzahl p eine ganze Zahl k_p gefunden werden kann, so daß $\hat{H}^r(S_p, M) \xrightarrow{\mu} \hat{H}^r(S_p, N)$ surjektiv für $r = k_p - 1$, bijektiv für $r = k_p$ und injektiv für $r = k_p + 1$ ist, so definiert μ einen Isomorphismus $\hat{H}^r(H, M) \xrightarrow{\cong} \hat{H}^r(H, N)$ für beliebige kohomologische Grade r und beliebige Untergruppen H von G.*

Definition 2. Wir nennen ein solches μ eine *kohomologische Äquivalenz.*

Theorem 2 (Tate)**.** *Sei $\hat{H}^{p-1}(S_p, M) = 0$ und $\hat{H}^p(S_p, M)$ zyklisch von der Ordnung $\#S_p$ mit Erzeuger $\mathrm{Res}^G_{S_p} f$. Dann definiert $\cdot f$ einen Isomorphismus $\hat{H}^{q-p}(H, \mathbb{Z}) \cong H^q(H, M)$.*

1.6. **Die Hochschild-Serre Spektralfolge.**

Bemerkung 1. $E_2^{p,q} = H^p\big(G/H, H^q(H, M)\big) \Rightarrow H^{p+q}(H, M)$.

Satz 1. $0 \to H^1(G/H, M^H) \xrightarrow{\mathrm{Infl}} H^1(G, M) \xrightarrow{\mathrm{Res}} H^1(H, M)^{G/H}$.

Satz 2. *Falls $H^q(H, M) = 0$ für $0 < q < p$, so ist $H^q(G/H, M^H) \xrightarrow{\mathrm{Infl}} H^q(G, M)$ für $0 \leq q \leq p$ ein Isomorphismus, und $0 \to H^p(G/H, M^H) \xrightarrow{\mathrm{Infl}} H^p(G, M) \xrightarrow{\mathrm{Res}} H^p(H, M)^{G/H}$.*

Bemerkung 2. $E_2^{p,q} = H^p\big(G/H, H^q(H, M)\big) \Rightarrow H^{p+q}(H, M)$.

Satz 3. $H_1(H, M)_{G/H} \xrightarrow{\mathrm{Cores}} H_1(G, M) \xrightarrow{\mathrm{Defl}} H_1(G/H, M_H) \to 0$.

Satz 4. *Falls $H_q(H, M) = 0$ für $0 < q < p$, so ist $H_q(G, M) \xrightarrow{\mathrm{Defl}} H_q(G/H, M_H)$ für $0 \leq q \leq p$ ein Isomorphismus, und $H_p(H, M)_{G/H} \xrightarrow{\mathrm{Cores}} H_p(G, M) \xrightarrow{\mathrm{Defl}} H_p(G/H, M_H) \to 0$.*

1.7. **Limites.**

Definition 1. Direkte Limites.

Satz 1. *$\hat{H}$ und direkte Limites.*

Definition 2. lim und $\lim^1$.

Fakt 1. Bei surjektiven Projektionen verschwindet $\lim^1$.

Satz 2. *Falls $\lim^1 \mathcal{C}^i = 0$ hat man eine kurze exakte Folge* $0 \to \lim^1 H^{p-1}\big(\mathcal{C}^*\big) \to H^p(\lim \mathcal{C}^*) \to \lim H^p(\mathcal{C}^*)$

1.8. **Proendliche Gruppen.**

Fakt 1. Jede offene Untergruppe einer topologischen Gruppe ist abgeschlossen, und jede abgeschlossene Untergruppe von endlichem Index offen.

Definition 1. Proendliche Gruppe.

Fakt 2. Krull-Topologie.

Definition 2. Kategorie der G-Moduln.

Bemerkung 1. Ind, ind und Frobenius-Reziprozität.

Fakt 3. Kurze Diskussion injektiver Objekte.

Satz 1. *Shapiro im proendlichen Fall.*

Satz 2. *$H^*(G,M)$ als direkter Limes der $H^*(G/H,M^H)$.*

Folgerung 1. *H^1 und Kreuzmorphismen.*

Definition 3. Restriktion und Korestriktion.

Fakt 4. $\mathrm{Cores}\mathrm{Res} = [G:H]\cdot$.

Definition 4. $\int_G f(g)dg = \int_G f(g)\, d_G g \in A \otimes \mathbb{Q}$ für lokal konstante $G \xrightarrow{f} A$.

Beispiel 1. Sei $\sigma \in G = \hat{\mathbb{Z}}$ ein topologischer Erzeuger. Anwendung von (1.4.5) zeigt, daß wir $H^*(\hat{\mathbb{Z}},M)$ als die Kohomologie von

$$0 \to M \xrightarrow{m \to \sigma m - m} M \xrightarrow{m \to \int_G \gamma m\, d\gamma} \left(M \otimes \mathbb{Q}\right)^G \to 0$$

berechnen können. Insbesondere

$$H^p(\hat{\mathbb{Z}},\mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & p=0 \\ \mathbb{Q}/\mathbb{Z} & p=2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{1}$$

Sei N eine positive ganze Zahl und $H = N\hat{\mathbb{Z}} \subseteq G$, dann erhält man Restriktion und Korestriktion aus dem kommutativen Diagramm von Kokettenkomplexen

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "m\to\sigma m-m"] \arrow[d, "\mathrm{Id}_M"'] & M \arrow[r, "m\to\int_G \gamma m\, d_G\gamma"] \arrow[d, "\sum_{k=0}^{N-1}\sigma^k"'] & \left(M\otimes\mathbb{Q}\right)^G \arrow[r] \arrow[d, "N\cdot"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "m\to\sigma^N m-m"] \arrow[d, "\sum_{k=0}^{N-1}\sigma^k"'] & M \arrow[r, "m\to\int_H \gamma m\, d_H\gamma"] \arrow[d, "\mathrm{Id}_M"'] & \left(M\otimes\mathbb{Q}\right)^H \arrow[r] \arrow[d, "\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\sigma^k"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "m\to\sigma m-m"] & M \arrow[r, "m\to\int_G \gamma m\, d_G\gamma"] & \left(M\otimes\mathbb{Q}\right)^G \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} \tag{2}$$

Insbesondere kommutieren

$$\begin{tikzcd}
H^0(G,\mathbb{Z}) \arrow[r, "(1)"] \arrow[d, "\mathrm{Res}"'] & \mathbb{Z} \arrow[d, "\mathrm{Id}_{\mathbb{Z}}"'] & H^2(G,\mathbb{Z}) \arrow[r, "(1)"] \arrow[d, "\mathrm{Res}"'] & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \arrow[d, "N\cdot"'] \\
H^0(H,\mathbb{Z}) \arrow[r, "(1)"] \arrow[d, "\mathrm{Cores}"'] & \mathbb{Z} \arrow[d, "N\cdot"'] & H^2(G,\mathbb{Z}) \arrow[r, "(1)"] \arrow[d, "\mathrm{Res}"'] & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \arrow[d, "\mathrm{Id}_{\mathbb{Q}/\mathbb{Z}}"'] \\
H^0(G,\mathbb{Z}) \arrow[r, "(1)"] & \mathbb{Z} & H^2(G,\mathbb{Z}) \arrow[r, "(1)"] & \mathbb{Q}/\mathbb{Z}
\end{tikzcd} \tag{3}$$

Satz 3. *Hochschild-Serre für proendliche Gruppen.*

2. Lokale Klassenkörpertheorie

2.1. Die Brauersche Gruppe eines lokalen Körpers.

Satz 1. *Sei L/K eine unverzweigte endliche Erweiterung lokaler Körper.*

- $\hat{H}^*(L/K, \mathcal{O}_L^*) = 0$.
- $\hat{H}^*(L/K, L^*) \xrightarrow{v_L} \hat{H}^*(L/K, \mathbb{Z})$.

Durch Übergang zum direkten Limes mittels Inflation kommt

Folgerung 1. *Es gilt $H^p(K^{\mathrm{uv}}/K, \mathcal{O}^\times) = 0$ für $p > 0$, wobei $\mathcal{O}$ die Vereinigung der $\mathcal{O}_{L/K}$ über die einzelnen unverzweigten ist.*

$$H^p(K^{\mathrm{uv}}/K, K^{\mathrm{uv}\times}) = \begin{cases} K^\times & p = 0 \\ \mathbb{Q}/\mathbb{Z} & p = 2 \\ 0 & \textit{sonst,} \end{cases}$$

wobei der Isomorphismus im zweiten Fall mittels der $\mathrm{inv}_{L/K}$ hergestellt wird.

Definition 1. Sei $H^2(K^{\mathrm{uv}}/K, L^\times) \xrightarrow{\mathrm{inv}_K^{\mathrm{uv}}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ der durch Anwendung des obigen Satzes erhaltene Isomorphismus.

Aus (1.8.3) folgt:

Satz 2. *Das folgende Diagramm kommutiert für endliche Körpererweiterungen L/K:*

$$\begin{tikzcd}
H^2(K^{\mathrm{uv}}/K, K^{\mathrm{uv}\times}) \arrow[r, "\mathrm{Res}"] \arrow[d, "\mathrm{inv}_K^{\mathrm{uv}}"'] & H^2(K^{\mathrm{uv}}/L, K^{\mathrm{uv}\times}) \arrow[r] & H^2(L^{\mathrm{uv}}/L, L^{\mathrm{uv}\times}) \arrow[d, "\mathrm{inv}_L^{\mathrm{uv}}"] \\
\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \arrow[rr, "{[L:K]}"] & & \mathbb{Q}/\mathbb{Z}
\end{tikzcd}$$

Es sei i_K die Verknüpfung $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \xrightarrow{\mathrm{inv}_K^{\mathrm{uv}\,-1}} H^2(K^{\mathrm{uv}}/K, K^{\mathrm{uv}\times}) \xrightarrow{\mathrm{Infl}} H^2(K^{\mathrm{sep}}/K, K^{\mathrm{sep}\times})$. Sei L/K separabel. Nach dem Satz und auf Grund der Kommutativität von

$$\begin{tikzcd}
H^p(G/I, M^I) \arrow[r, "\mathrm{Infl}"] \arrow[d, "\mathrm{Res}"'] & H^p(G, M) \arrow[d, "\mathrm{Res}"] \\
H^p(H/I \cap H, M^{I\cap H}) \arrow[r, "\mathrm{Infl}"] & H^p(H, M)
\end{tikzcd}$$

angewendet mit $p = 2$, $G = \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{sep}}/K)$, $I = \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{sep}}/K^{\mathrm{uv}})$, $H = \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{sep}}/L)$, $M = K^{\mathrm{sep}\times}$ erhalten wir

Folgerung 2. *Für eine separable Erweiterung L/K kommutiert*

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \arrow[r, "i_K"] \arrow[d, "{[L:K]\cdot}"'] & H^2(K^{\mathrm{sep}}/K, K^{\mathrm{sep}\times}) \arrow[d, "\mathrm{Res}"] \\
\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \arrow[r, "i_L"] & H^2(K^{\mathrm{sep}}/L, K^{\mathrm{sep}\times})
\end{tikzcd}$$

Zusammen mit der kurzen exakten Inflations-Restriktions-Folge kommt

Satz 3. *Sei L/K eine endliche Galois-Erweiterung lokaler Körper. Dann gibt es genau einen injektiven Homomorphismus $i_{L/K}$, der das Diagramm*

$$\begin{tikzcd}
\frac{1}{[L:K]}\mathbb{Z}/\mathbb{Z} \arrow[r, "i_{L/K}"] \arrow[d, "\subseteq"'] & H^2(L/K, L^\times) \arrow[d, "\mathrm{Infl}"] \\
\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \arrow[r, "i_K"] & H^2(K^{\mathrm{sep}}/K, K^{\mathrm{sep}\times})
\end{tikzcd}$$

kommutativ macht.

Da der senkrechte Pfeil auf der rechten Seite injektiv ist, erhält man noch aus Folgerung 2

Folgerung 3. *Für jede Galois-Erweiterung M/K und jeden Zwischenkörper $K \subseteq L \subseteq M$ kommutieren*

$$\begin{tikzcd} \frac{1}{[M:K]}\mathbb{Z}/\mathbb{Z} \arrow[r, "i_{M/K}"] \arrow[d, "{[L:K]\cdot}"'] & H^2(M/K, M^\times) \arrow[d, "\mathrm{Res}"] \\ \frac{1}{[M:L]}\mathbb{Z}/\mathbb{Z} \arrow[r, "i_{M/L}"] & H^2(M/L, M^\times) \end{tikzcd}$$

und

$$\begin{tikzcd} \frac{1}{[M:K]}\mathbb{Z}/\mathbb{Z} \arrow[r, "i_{M/K}"] & H^2(M/K, M^\times) \\ \frac{1}{[M:L]}\mathbb{Z}/\mathbb{Z} \arrow[r, "i_{M/L}"] \arrow[u, "\subseteq"] & H^2(M/L, M^\times) \arrow[u, "\mathrm{Cores}"'] \end{tikzcd}$$

Die zweite Aussage folgt aus der ersten nebst Satz 1.2.6, denn der linke vertikale Pfeil im ersten Diagramm ist surjektiv.

Theorem 3. *Für jede endliche Galois-Erweiterung nichtarchimedischer lokaler Körper ist $i_{L/K}$ ein Isomorphismus.*

Definition 2. Sei $H^2(L/K, L^*) \xrightarrow{\mathrm{inv}_{L/K}} \frac{1}{[L:K]}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$ der zu $i_{L/K}$ inverse Isomorphismus.

Folgerung 4. *Für jeden nicharchimedischen lokalen Körper K hat man einen Isomorphismus $H^2(K^{\mathrm{sep}}/K, K^{\mathrm{sep}\times} \xrightarrow{\mathrm{inv}_K} \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, welcher invers zu i_K ist.*

Folgerung 5. *Für jede Galois-Erweiterung M/K und jeden Zwischenkörper $K \subseteq L \subseteq M$ kommutieren*

$$\begin{tikzcd} H^2(M/K, M^\times) \arrow[r, "\mathrm{inv}_{M/K}"] \arrow[d, "\mathrm{Res}"] & \frac{1}{[M:K]}/\mathbb{Z} \arrow[d, "{[L:K]\cdot}"'] \\ H^2(M/L, M^\times) \arrow[r, "\mathrm{inv}_{M/L}"] & \frac{1}{[M:L]}/\mathbb{Z} \end{tikzcd}$$

und

$$\begin{array}{ccc} H^2(M/K,M^\times) & \xrightarrow{\mathrm{inv}_{M/K}} & \frac{1}{[M:K]}/\mathbb{Z} \\ \uparrow{\scriptstyle\mathrm{Cores}} & & \uparrow{\scriptstyle\subseteq} \\ H^2(M/L,M^\times) & \xrightarrow{i_{M/L}} & \frac{1}{[M:L]}/\mathbb{Z} \end{array}$$

Bemerkung 1. Wir haben einen eindeutigen Isomorphismus $H^2(\mathbb{C}/\mathbb{R},\mathbb{C}^\times) \xrightarrow{\mathrm{inv}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}} \frac{1}{2}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$.

Der Beweis des Theoremes gelingt in mehreren Schritten.

Satz 4. *Sei L/K eine zyklische Erweiterung lokaler Körper. Dann ist $i_{L/K}$ ein Isomorphismus, und $\hat{H}^p(L/K,L^\times)$ verschwindet für ungerade p.*

Beweis. Nach Hilberts Theorem 90 genügt der Beweis von $q_H(L/K,L^\times) = [L:K]$ oder $q_H(L/K,\mathcal{O}_L^\times = 1$. Da der Herbrand-Quotient endlicher Gruppen 1 ist, genügt der Nachweis der Existenz einer Untergruppe U von endlichem Index in $\mathcal{O}_L^\times$ mit $\hat{H}^*(L/K,U) = 0$. In Charakteristik 0 kann die Exponentialabbildung verwendet werden.

Allgemein sei $(x^\sigma)_{\sigma\in\mathrm{Gal}(L/K)}$ eine Normalbasis von L/K. Wir dürfen $x \in \mathcal{O}_L$ annehmen. Sei V der von den x^σ erzeugte freie $\mathcal{O}_K$-modul. Indem man x nochmals durch $\pi_K^l x$ mit genügend großem l ersetzt, darf man $V \cdot V \subseteq \pi_K V$ annehmen. Sei $V_j = 1 + \pi_K^j V$, dann ist V_j eine offene Untergruppe in $\mathcal{O}_L^\times$ und $V_j/V_{j+1} \cong V/\pi_K V \cong \mathrm{Ind}_{\{\mathbf{1}\}}^{\mathrm{Gal}(L/K)}\mathfrak{k}$ als Galois-Moduln. Also verschwindet $\hat{H}^*(L/K,V_j/V_{j+1})$, und nach Satz 1.7.2 verschwindet $\hat{H}^*(L/K,V_0)$. ☐

Das folgende Lemma beweist nun, daß $\#H^2(L/K,L^*)$ ein Teiler von von $[L:K]$ ist und beendet damit den Beweis des Theoremes:

Lemma 1 ("Ugly Lemma" bei Serre in Cassels/Föhlich)**.** *Sei G eine endliche Gruppe, M ein G-Modul, e und p natürliche Zahlen, so daß für jede Untergruppe $K \subseteq G$ und jeden Normalteiler $H \subseteq K$ mit zyklischem Quotienten erfüllt ist:*

Es gilt $H^q(K/H,M^H) = 0$ für $0 < q < p$, und $\#H^p(K/H,M^H)$ teilt $[K:H]^e$.

Dann gilt dieselbe Aussage für jede Untergruppe $K \subseteq G$ und jeden Normalteiler H in K.

2.2. **Die Fundamentalklasse.**

Definition 1. Sei $u_{L/K} = i_{L/K}\big(\frac{1}{[L:K]} \bmod \mathbb{Z}\big) = \mathrm{inv}_{L/K}^{-1}\big(\frac{1}{[L:K]} \bmod \mathbb{Z}\big)$.

Fakt 1. $\mathrm{Res}_{M/K}^{L/K} u_{L/K} = u_{L/M}$ und $\mathrm{Cores}_{M/K}^{L/K} u_{L/M} = [M:K]u_{L/K}$

Aus Theorem 2 folgt nun

Theorem 4. *Wir haben einen Isomorphismus $\hat{H}^{p-2}(L/K,\mathbb{Z}) \xrightarrow{u_{L/K}\cdot} \hat{H}^p(L/K,\mathbb{Z})$.*

Fakt 2. Verhalten Restriktion, Korestriktion.

Definition 2. $\psi_{L/K}$.

Fakt 3. Verhalten Restriktion, Korestriktion.

Folgerung 1. *Wenn* $M \subseteq L$ *der maximale abelsche Teilkörper von* L/K *ist, gilt* $N_{L/K}(L^\times) = N_{M/K}(M^\times)$.

Satz 1. *Wir haben*

$$[L:K]\chi\big(\psi_{L/K}(k)\big) + \mathbb{Z} = \mathrm{inv}_K\big((d\chi) \cup [k]\big).$$

wobei $\chi \in \mathrm{Hom}\big(\mathrm{Gal}(L/K), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}\big) \cong \hat{H}^1(L/K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, $d\chi$ *dessen Bild unter* $\hat{H}^1(L/K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \xrightarrow{d} \hat{H}^2(L/K, \mathbb{Z})$ *und* $[k] \in \hat{H}^0(L/K, K^\times)$.

Der Beweis folgt aus Folgerung 1.3.6

Folgerung 2. *Sei* L/K *unverzweigt, dann* $\psi_{L/K}(k) = F_{L/K}^{v_K(k)}$.

Folgerung 3. $\psi_{L/K}(k)\,|_M = \psi_{M/L}(k)$.

Folgerung 4. *Wenn* $M \subseteq L$ *der maximale abelsche Teilkörper von* L/K *ist, gilt* $N_{L/K}(L^\times) = N_{M/K}(M^\times)$.

Satz 2. *Sei* L/K *eine abelsche Erweiterung, welche* K^{uv} *enthält. Sei* $K^\times \xrightarrow{\psi} \mathrm{Gal}(L/K)$ *ein Homorphismus mit* $\psi(k)\,|_{K^{\mathrm{uv}}} = F_K^{v_K(k)}$ *und mit* $\psi(k)\,|_L = \mathrm{Id}$, *falls* L/K *endlich und* $k \in N_{L/K}(L^\times)$ *ist. Dann gilt* $\psi = \psi_{L/K}$.

Bemerkung 1. $\mathbb{R}$.

2.3. **Der lokale Existenzsatz.**

Definition 1. Normuntergruppe.

Bemerkung 1. Wir haben also eine Bijektion zwischen den Isomorphieklassen endlicher abelscher Erweiterungen und den Normuntergruppen.

Satz 1. *Eine Untergruppe von* $K^\times$ *ist genau dann Normuntergruppe, wenn sie offen ist und endlichen Index hat.*

Folgerung 1. $\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{ab}}/K)$ *im nichtarchimedischen Fall.*

Satz 2. *Kummer-Paarung.*

2.4. **Verschiedenes.** Obere Numerierung, Lubin-Tate.

Beispiel 1. ψ_K für $K = \mathbb{Q}_p$.

3. Globale Klassenkörpertheorie

3.1. **Kohomologie der Idelegruppe.**

Satz 1.
- $\hat{H}^*(L/K, \mathbb{A}_K) = 0$.
- $\hat{H}^*(L/K, \mathbb{I}_K) = \coprod_{v \in \mathfrak{S}_K} \hat{H}^*(L_w/K_v, L_w^\times)$.

3.2. **Die beiden Ungleichungen.**

Satz 1 (Erste Ungleichung). *Es sei L/K eine endliche Galois-Erweiterung globaler Körper. Dann gilt*

$$\#\hat{H}^2(L/K, \mathbb{I}_L/L^\times) = \left[\mathbb{I}_K : K^\times N_{L/K}\mathbb{I}_L\right] \leq [L:K]. \tag{1}$$

Satz 2 (Zweite Ungleichung). *Sei L/K zyklisch, dann gilt $q_H(\mathbb{I}_L/L^\times) = [L:K]$.*

Beweis. Sei immer $G = \mathrm{Gal}(L/K)$. Für eine Stelle v von K sei $G_v \subseteq G$ der Stabilisator irgendeiner Stelle w über v.

Sei T eine endliche $\mathrm{Gal}(L/K)$-invariante Menge von Stellen von L, die alle verzweigten und archimedischen Stellen sowie Erzeuger der Idealklassengruppe von L enthält. Sei S die Menge der Stellen von K, die unter T liegen. Dann gilt $\mathbb{I}_L = L^\times \mathbb{I}_{L,T}$, also $\mathbb{I}_L/L^\times \cong \mathbb{I}_{L,T}/L_T^\times$, wobei L_T die Menge der T-Einheiten ist. Also

$$q_H(\mathbb{I}_L/L^\times) = \frac{q_H(\mathbb{I}_{L,T})}{q_H(L_T)} = \frac{\prod_{v\in S}[L_w : K_v]}{q_H(L_T)}. \tag{+}$$

Sei V der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller $\mathbb{R}$-wertigen Funktionen f auf T mit $\sum_{w\in T} f(w) = 0$. Durch $x \to f$ mit $f(w) = \log|x|_w$ ist eine Homomorphismus von G-Moduln definiert, dessen Kern endlich (die Gruppe der Einheitswurzeln in L) und dessen Bild ein Gitter Γ in V ist. Aus (+) und Fakt 1.4.4 folgt

$$q_H(\mathbb{I}_L/L^\times) = \frac{\prod_{v\in S}[L_w : K_v]}{q_H(\Gamma)} = \frac{\prod_{v\in S}[L_w : K_v]}{q_H(\Gamma')} \tag{\%}$$

nach Satz 1.4.3, wobei $\Gamma' \subseteq V$ ein beliebiges zweites Gitter ist. Dafür wählen wir die Menge aller $T \xrightarrow{f} \mathbb{Z}$ mit $\sum_{w\in T} f(w) = 0$. Wir haben eine kurze exakte Folge

$$0 \to \Gamma' \to \oplus_{v\in S}\mathrm{Ind}_{G_v}^G \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \to 0,$$

also

$$q_H(\Gamma') = \frac{\prod_{v\in S} q_{H,G_v}\mathbb{Z}}{q_{H,G}\mathbb{Z}} = \frac{\prod_{v\in S}[L_w : K_v]}{[L:K]},$$

und die Behauptung aus (%). □

Folgerung 1. $[L:K]$ *teilt* $\left[\mathbb{I}_K : K^\times N_{L/K}\mathbb{I}_L\right]$. *Es tritt also Gleichheit in der ersten Ungleichung (1) ein, und $\hat{H}^1(L/K, \mathbb{I}_L/L^\times) = 0$.*

3.3. **Artin-Abbildung.**

Definition 1. Artin-Abbildung (im Fall abelscher Erweiterungen).

Lemma 1. *Im abelschen Fall erzeugen die Frobeniusse die Galois-Gruppe.*

Lemma 2. *Sei S eine endliche Menge, und für $v \in S$ sei $U_v \subseteq K_v^\times$. Dann gilt $\prod_{v\in S} K_v^\times = K^\times \prod_{v\in S} U_v$, wobei K diagonal in das Produkt auf der rechten Seite eingebettet wird.*

Satz 1.
- *Die Artin-Abbildung ist eindeutig bestimmt und surjektiv mit Kern $K^\times N_{L/K}\mathbb{I}_L$.*

- *Die Einschränkung auf M einer Artin-Abbildung für L/K ist eine Artin-Abbildung für M/K.*

Beweis. Die Eindeutigkeit folgt aus Lemma 2 und die Surjektivität aus Lemma 1. Durch Anwendung von Lemma 2 folgt

$$N_{L/K}\mathbb{I}_L = \big(N_{L/K}L^\times\big)\Big(\prod_{v\in S} U_v \times \prod_{v\notin S}{}' (K_v^\times, \mathcal{O}_v^\times)\Big) \subseteq K^\times\Big(\prod_{v\in S} U_v \times \prod_{v\notin S}{}' (N_{L_w/K_v}L_w^\times, \mathcal{O}_{K_v}^\times)\Big).$$

Für eine Einzelkomponente $k = N_{L_w/K_v}l_w$ mit $w \notin S$ auf der rechten Seite haben wir $\psi(k) = \psi_{L_w/K_v}(k) = \mathrm{Id}_L$. Auf Grund der Surjektivutät und der ersten Ungleichung kann der Kern nicht größer sein.

Die zweite Behauptung folgt aus den Definitionen. □

Folgerung 1. *Wenn $x \in K^\times N_{M/K}\mathbb{I}_M$ so ist $\psi(x)\,|_M = \mathrm{Id}_M$.*

Folgerung 2. *Wenn $x \in K_v^\times \subseteq \mathbb{I}_K$ so stabilisiert $\psi_v(x)$ jede Stelle w, die über v liegt.*

Folgerung 3. *Wenn $\mathrm{Gal}(L_w/K_v)$ von m anulliert wird und L_w die maximale unverzweigte Erweiterung von K_v vom Grad m enthält, so gilt $\psi_v = \psi_{L_w/K_v}$.*

3.4. **Die Hautresultate.**

Theorem 5 (Globale Klassenkörpertheorie)**.** • *$H^1(K^{\mathrm{sep}}/K, \bigcup_{L/K} C_L) = 0$, und*

$$0 \to \mathrm{Br}(K) \to \coprod_v \mathrm{Br}(K_v) \xrightarrow{\sum \mathrm{inv}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to 0. \tag{1}$$

- *Für eine endliche Galois-Erweiterung globaler Körper gilt $H^1(L/K, C_L) = \{1\}$, während $H^2(L/K, C_L)$ zyklisch von der Ordnung $[L:K]$ ist. Als Erzeuger $u_{L/K}$ kann das Bild in $H^2(L/K, C_L)$ eines $(x_v)_v \in \coprod_v \mathrm{Br}(K_v)$ mit $\sum \mathrm{inv}_v(x_v) = \frac{1}{[L:K]} + \mathbb{Z}$ genommen werden.*
- *Dann gilt $\mathrm{Res}^{L/K}_{L/M} u_{L/K} = u_{L/M}$, und $\hat{H}^{q-2}(L/K, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\cdot u_{L/K}} \hat{H}^q(L/K, C_L)$ ist ein Isomorphismus.*
- *Sei $I_K/K^\times N_{L/K}I_L \xrightarrow{\psi_{L/K}} \mathrm{Gal}(L/K)_{\mathrm{ab}}$ der entsprechende Isomorphismus, dann ist $\psi_{L/K}(k_v) = \prod_v \psi_{L_w/K_v}(k_v)$.*
- *Insbesondere gilt $\prod_v \psi_{L_w/K_v}(k) = 1$ für $k \in K^\times$.*

Der Beweis erfolgt in mehreren Schritten.

Zunächst definieren wir eine Artin-Abbildung ψ_m für $\mathbb{Q}(\mu_m)/\mathbb{Q}$. Für $v = \infty$ sei $\psi_v(x)$ die komplexe Konjugation im Fall $x < 0$ und $\psi_v(x) = \mathrm{Id}$ für $x > 0$.

Lemma 1. *$\mathbb{Q}_p(\mu_{p^k})/\mathbb{Q}_p$ ist rein verzweigt vom Grad $(p-1)p^{k-1}$.*

Beweis. Sei ζ eine primitive m-te Einheitswurzel. Wegen

$$\frac{\zeta^l - 1}{\zeta - 1} = \sum_{j=1}^{m} \zeta^j$$

ist $\zeta^l - 1$ durch $\zeta - 1$ teilbar. Wenn auch ζ^l eine primitive m-te Einheitswurzel ist, kann man die Rollen von ζ^l und ζ vertauschen. Das Ideal $\zeta - 1$ hängt also nicht von der Auswahl einer primitiven n-ten Einheitswurzel ab. Wir wenden dies im Fall $m = p^k$ an, in $\mathbb{Q}$ (!) gilt dann

$$(+) \qquad \prod_{0<j<p^k,\ p \nmid j} (\zeta - 1) = N_{\mathbb{Q}(\mu_m)/\mathbb{Q}}(\zeta - 1).$$

Das Minimalpolynom von ζ ist $P(T) = \sum_{j=0}^{p-1} T^{jp^{k-1}}$, das Minimalpolynom von $\zeta - 1$ also $P(T+1)$ und die Norm auf der rechten Seite von (+) ist $P(1) = p$. In $L = \mathbb{Q}_p(\zeta)$ folgt

$$\big((\zeta - 1)\mathcal{O}_L\big)^{(p-1)p^{k-1}} = p\mathcal{O}_L$$

und die Behauptung, denn auf Grund der Injektivität von $\mathrm{Gal}(L/K) \to (\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z})^*$ kann der Körpergrad auch nicht größer werden. □

Sei v durch die Primzahl p gegeben und $x = p^k y$ mit $y \in \mathbb{Z}_p^\times$. Sei $m = p^k m'$. Es gibt genau ein $\sigma \in \mathrm{Gal}\big(\mathbb{Q}_p(\mu_m) \,/\, \mathbb{Q}_p\big)$ mit $\sigma(\zeta) = \zeta^{p^k}$ für $\zeta \in \mu_{m'}$ und $\sigma(\zeta) = \zeta^{y^{-1}}$ für $\zeta \in \mu_{p^k}$. In der Tat gilt $\mathbb{Q}_p(\mu_m) = \mathbb{Q}_p(\mu_{m'})\mathbb{Q}_p(\mu_{p^l})$, und nach dem Lemma kann ein Element der Galois-Gruppe separat auf den Faktoren bestimmt werden.

Sei $x = -1$, auf μ_{p^k} ist $\psi_p(x)$ die komplexe Konjugation, wogegen $\psi_\ell(x)\big|_{\mu_{p^l}} = \mathrm{Id}_{\mu_{p^l}}$ für Primzahlen $l \neq p$ ist. Da $\psi_\infty(x)$ die komplexe Konjugation ist, folgt die Behauptung in diesem Fall.

Sei $x = \ell$, auf μ_{p^k} mit $p \neq \ell$ ist $\psi_q(x)\ \zeta^\ell$ für $q = \ell$, $\zeta^{\ell^{-1}}$ für $q = p$ und Id für $q \notin \{\ell, p\}$.

Sei $x = \ell$, auf μ_{ℓ^k} ist $\psi_p(x) = \mathrm{Id}$ für alle Primzahlen p.

Es folgt die Existenz einer Artin-Abbildung für $\mathbb{Q}(\mu_m)/\mathbb{Q}$. Aus Folgerung 3.3.3 folgt, daß diese mit der durch die lokale Klassenkörpertheorie gegebenen übereinstimmt.

Lemma 2. *Für eine abelsche Erweiterung L/K sind äquivalent:*
- *Durch die lokale Klassenkörpertheorie ist eine Artin-Abbildung für L/K definiert.*
- *Für alle $x \in \mathrm{Br}(L/K)$ ist $\sum_v \mathrm{inv}_v(x) = 0$ in $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.*

Es folgt, daß diese äquivalenten Bedingungen für $K = \mathbb{Q}$ gelten, wenn L in einer zyklotomischen Erweiterung enthalten ist.

3.5. **Abstellkammer.**

Satz 1. *Für einen lokalen Körper gilt bei der üblichen Konvention für den Betrag* $\frac{[K^\times : K^{\times n}]}{\#\mu_n(K)} = q_H(K^\times) = n/\left|n\right|_K$ *falls* $\left|n\right|_K \neq 0$ *und G trivial aus $K^\times$ wirkt.*