

# Faserbündel und K-Theorie

Prof. Dr. Carl-Friedrich Bödigheimer

**Zeit & Ort:** dienstags, 14:15 - 16:00 Uhr, Seminarraum N 0.003

**Beginn:** Dienstag, 9. April 2024

**Vorbesprechung:** Dienstag 30. Januar 2024, 16:15 - 17:00 Uhr, Raum 1.008

**Anmeldung:** wie üblich; schreiben Sie an [cfb@math.uni-bonn.de](mailto:cfb@math.uni-bonn.de), falls Sie interessiert sind, aber bei der Vorbesprechung verhindert sind.

Das Seminar behandelt im ersten Teil die Theorie der Faserbündel. Ziel ist die Konstruktion von sog. klassifizierenden Räumen und der Klassifikationssatz. Im zweiten Teil soll gezeigt werden, wie man aus den Vektorbündeln über einem Raum  $X$  eine abelsche Gruppe  $K(X)$  macht und warum dieser Funktor zu einer Kohomologietheorie  $K^*(X)$  in einer reellen Variante  $KO^*(X)$  und einer komplexen Variante  $KU^*(X)$  führt. Im dritten Teil wollen wir den Bott'schen Periodizitätssatz  $KU^n(X) = KU^{n+2}(X)$  beweisen und mehrere Anwendungen betrachten.

Vorausgesetzt wird ein solides Wissen in der allgemeinen (mengentheoretischen) Topologie und die Anfänge der Homotopietheorie, inklusive der Fundamentalgruppe und der Theorie der Überlagerungen. Ebenso notwendig ist es, die Homologietheorie etwa im Umfang der Vorlesung 'Topologie I' zu kennen.

Die Vorträge sind auf 90 Minuten angelegt: das heißt, man bereite ca. 70 Minuten vor und stelle sich auf viele Zwischenfragen ein. Die Vorträge müssen mindestens 2 Wochen vor dem Vortragstermin fertig und mit mir durchgesprochen sein. Grossen Wert ist auf die Mitarbeit im Seminar zu legen, weshalb auch Anwesenheit wichtig ist.

Vorträge können auch auf Englisch gehalten werden.

Jede der angegebenen Quellen enthalten fast den gesamten Stoff des Seminars, sind aber sehr unterschiedlich. Das Buch von M. Atiyah ist sehr knapp, das Buch von K. Knapp hingegen ist sehr ausführlich und enthält sehr viele Beispiele.

## Vorträge

---

- (1) **Faserbündel I** 9. April 2024  
 ..... NAME, VORNAME  
 Definitionen: Basisraum, Totalraum, Faser; lokale Trivialität. Strukturgruppe. Atlas für ein Bündel.  
 Beispiele 1: Vektorbündel (insbesondere Tangentialbündel und Normalenbündel). Beispiele 2: Überlagerungen. Einschränkung von Bündeln (Teilbündel). Schnitte in Faserbündel.  
 [Hu, chap. 2, 3 und Teile von 4, 5].  
 ..... *Kein Vortrag am 16. April !!*

- (2) **Faserbündel II** 23. April 2024  
 ..... NAME, VORNAME  
 Unterbündel, Quotientenbündel. Morphismen von Bündeln, Isomorphismen und Automorphismen. Kern und Kokern eines Morphismus. Induzierte Bündel. Strukturgruppe und Prinzipalbündel. Isomorphieklassen  $\text{Bun}_G^F(X)$  von  $G$ -Bündeln mit Faser  $F$  über  $X$ , Isomorphieklassen  $\text{Prin}_G(X)$  von  $G$ -Prinzipalbündeln. Faserwechsel und assoziierte Prinzipalbündel, sowie Beweis des Isomorphismus  $\text{Bun}_G^F(X) \cong \text{Prin}_G(X)$ .  
 [Hu, Teile von chap. 2+3+4 ].
- (3) **Klassifizierender Raum  $BG$  einer Gruppe  $G$**  30. April 2024  
 ..... NAME, VORNAME  
 Homotopietheoretische Definition von  $BG$ . Universelles Bündel  $\zeta : EG \rightarrow BG$ . Beispiele für diskrete Gruppen und der Zusammenhang mit Eilenberg-MacLane-Räumen. Beispiele für Matrizen Gruppen (Graßmann-Mannigfaltigkeiten  $\text{Gr}_n$ ). Allgemeine Konstruktion von  $BG$  nach Milnor.  
 [Hu, Chap. 4.10 + 4.11],
- (4) **Homotopieklassifikation von Bündeln I** 7. Mai 2024  
 ..... NAME, VORNAME  
 Homotopieinvarianz von Bündeln bei Zurückziehung (Induzierung). Beweis des Klassifikationssatzes  $\text{Prin}_G(X) \cong [X, BG]$ .  
 [Hu, chap. 4.12], [Kn, Kap. 3], [At, chap. 1.4].
- (5) **Homotopieklassifikation von Bündeln II** 14. Mai 2024  
 ..... NAME, VORNAME  
 Verkleben von Bündeln über Teilräumen, insbesondere obere und unter Hemisphären von Einhängungen (clutching). Beweis des Klassifikationssatzes  $\text{Bun}_G^F(\Sigma) \cong [\Sigma X, G]$ .  
 [At, 1.4], [Hu, chap. 9], [Kn, Kap. 3].
- ..... *Wegen Pfingstferien kein Vortrag am 21. Mai !!*
- (6) **Vektorbündel I** 28. Mai 2024  
 ..... NAME, VORNAME  
 Beispiele reeller und komplexer Bündel, insbesondere Tangentialbündel, Normalenbündel. Unterbündel. Dimension. Orientierung eines reellen Vektorbündels. Metriken auf Vektorbündeln. Schnitte und Vektorfelder. Whitney-Summe und Tensorprodukt zweier Vektorbündel. Weitere Konstruktionen. Morphismen von Vektorbündeln; Kern, Bild, Kokern und Kobild eines Morphismus.  
 [At, chap. 1.1-1.3], [Kn, Kap. 1+2], [Hu, chap. 3].
- (7) **Vektorbündel II** 4. Juni 2024  
 ..... NAME, VORNAME  
 Fortsetzung von Schnitten. Fortsetzung von Isomorphismen. Existenz von komplementären Bündeln über kompakten Räumen.  
 [At, chap. 1.4], [Kn, Kap. 2.1].
- (8) **Reelle und komplexe K-Theorie** 11. Juni 2024  
 ..... NAME, VORNAME  
 Äquivalenz und stabile Äquivalenz. Monoid der Vektorbündel  $\text{Vect}(X)$  und der stabilen Vektorbündel  $\text{SVect}(X)$ . Addition. Komplementäre Bündel. Beispiele.  $K(X)$  als Grothendieck-Vervollständigung

von  $\text{Vect}(X)$ . Reduzierte Gruppe  $\tilde{K}(X)$ , relative Gruppen  $K(X, A)$ . Beispiele. Beziehung zwischen KO und KU. Beschreibung als Homotopiefunktor  $\tilde{K}(X) \cong [X, \text{Gr}_\infty[$  und  $\tilde{K}(\Sigma X) \cong [X, \text{GL}_\infty]$ .

[Hu, chap. 8.3, 8.4], [At, chap 2.1], [Kn, Kap. 4.4].

(9) **K(X) als exakter Funktor** 18. Juni 2024

..... NAME, VORNAME

Exaktheit der Folge  $K(X/A) \rightarrow K(X) \rightarrow K(A)$  für abgeschlossene Unterräume  $A \subset X$ . Puppe-Sequenz für Raumpaare  $(X, A)$  und Herleitung der langen exakten Sequenz

$$\dots \rightarrow K(\Sigma^{-n-1}A) \rightarrow K(\Sigma^{-n}X/A) \rightarrow K(\Sigma^{-n}X) \rightarrow K(\Sigma^{-n}A) \rightarrow \dots$$

[At, chap. 2.4], [Hu, chap. 9], [Kn, Kap. 2.6].

(10) **K(X) als Kohomologietheorie** 25. Juni 2024

..... NAME, VORNAME

Definition von  $K^*(X)$  durch  $K^n(X) := K(\Sigma^{-n}X)$  zunächst für negative Grade  $n$ , sodann unter Vorwegnahme der Bott-Periodizität auch für positives  $n$  durch  $K^n(X) := K^{-n}(X)$ . Nachweis der Eilenberg-Steenrod-Axiome. Einige Berechnungen.

[At, chap. 2.4, 2.5], [Hu, chap. 9].

(11) **Ringstruktur auf  $K^*(X)$**  2. Juli 2024

..... NAME, VORNAME

Multiplikation induziert durch das Tensorprodukt. Beispiele. Einige Berechnungen.

[At, chap. 2.6], [Hu, chap. 9.3].

(12) **Bott'scher Periodizitätssatz I** 9. Juli 2024

..... NAME, VORNAME

Für den komplexen Fall  $KU^n(X) \cong KU^{n+2}(X)$  soll der Beweis aus Atiyah oder Husemoller möglichst vollständig vorgetragen werden. (In Knapp findet man eine Übersicht über andere Beweise.)

[At, chap. 2.2] [Hu, chap. 10]

(13) **Bott'scher Periodizitätssatz II** 16. Juli 2024

..... NAME, VORNAME

Siehe Vortrag 12.

### LITERATUR

[At] Michael Atiyah: *K-Theory*. Verlag W. A. Benjamin, Inc. (1967).  
 [Hu] Dale Husemoller: *Fibre Bundles*. Springer-Verlag GTM 20 (1966, 1975<sup>2</sup>)  
 [Kn] Karlheinz Knapp: *Vektorbündel*. Springer-Verlag (2013)