Polarzerlegung

Erinnerung: Jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C},\ z \neq 0$ läßt sich, in Polarkoordinaten, eindeutig in der Form

$$z = r \cdot e^{i\varphi}$$

mit $r \in \mathbb{R}_{>0}$ und $\varphi \in [0, 2\pi)$ darstellen. Dabei ist die Multiplikation mit $e^{i\varphi}$ eine Drehung:

$$(r'e^{i\psi}) \cdot e^{i\varphi} = r'e^{i(\psi+\varphi)}$$

Analog hierzu wollen wir in diesem Kapitel versuchen, eine beliebige, invertierbare Matrix zu zerlegen. Was könnten die Analoga bei Matrizen sein?

Wir hatten gesehen, daß orthogonale Matrizen winkeltreu sind: Sei O orthogonal, also $O^{-1} = O^t$. Dann gilt

$$(O\vec{x})^t(O\vec{y}) = \vec{x}^t O^t O\vec{y} = \vec{x}^t \cdot \vec{y}$$

und

$$|O\vec{x}|^2 = (O\vec{x})^t \cdot (\overrightarrow{Ox}) = \vec{x}^t \cdot \vec{x} = |\vec{x}|^2$$

Also gilt:

$$\cos(\angle(O\vec{x}, O\vec{y})) = \frac{(O\vec{x})^t \cdot O\vec{y}}{|O\vec{x}||O\vec{y}|} = \frac{\vec{x}^t \cdot \vec{y}}{|\vec{x}||\vec{y}|} = \cos(\angle(\vec{x}, \vec{y}))$$

Wir können also orthogonale Matrizen als verallgemeinerte Drehungen auffassen.

Anmerkung: Orthogonale Matrizen haben als reelen Eigenwert nur die Werte ± 1.

Grund: Aus $A \cdot \vec{z} = \lambda\vec{z}$ folgt $\bar{\vec{z}}^t A\vec{z} = \bar{\vec{z}}^t \cdot \lambda\vec{z} = \lambda|\vec{z}|^2$. Daher gilt

$$\lambda = \frac{\bar{\vec{z}}^t A\vec{z}}{|\vec{z}|^2}$$

Außerdem ist $\bar{\vec{z}} \cdot A^t \cdot A \cdot \vec{z} = \bar{\vec{z}}^t A^t \lambda\vec{z}$, also

$$\lambda^{-1} = \frac{\bar{\vec{z}}^t A^t \vec{z}}{|\vec{z}|^2}$$

Nachrechnen zeigt: $\lambda^{-1} = \bar{\lambda}$.

Eine Eigenschaft von positiven Zahlen ist, daß wir aus ihnen (reelle) Wurzeln ziehen können. Das entsprechende Matrixanalogon lautet:

Definition: Eine symmetrische $n \times n-$Matrix A heißt positiv definit, wenn für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^n, \vec{x} \neq \vec{0}$ gilt:

$$\vec{x}^t A\vec{x} > 0$$

analog sind positiv semidefinit und negativ (semi-) definit definiert.

Bemerkung: Für eine Diagonalmatrix $A = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ gilt:

$$\vec{x}^t A\vec{x} = \lambda_1 x_1^2 + \ldots + \lambda_n x_n^2$$

Diese ist offenbar genau dann positiv definit, wenn alle $\lambda_i > 0$ sind. Ist $A = P^t DP$ mit einer Diagonalmatrix D und einer orthogonalen Matrix P, so sind die Spalten von P die Eigenvektoren von A mit den Eigenwerten λ_i (den Diagonaleinträgen von D): Aus $AP = DP$ folgt $A \cdot \vec{p}_i = \lambda_i \vec{p}_i$. A streckt also auschließlich in den Richtungen $\vec{p}_i$, auch eine Siegelung findet nicht statt.

Satz: Ist A eine invertierbare Matrix, so gibt es eine eindeutig bestimmte, orthogonale Matrix O und eine eindeutig bestimmte symmetrische, positiv definite Matrix Σ, mit

$$A = \Sigma \cdot O$$

Bemerkung: Neben dieser Zerlegung gibt es auch eine Zerlegung der Form $A = O\Sigma'$, allerdings ist i.a. $\Sigma \neq \Sigma'$.

Grund : 1) Existenz

Die Matrix $A \cdot A^t$ ist symmetrisch ($(A \cdot A^t)^t = A^{tt} \cdot A^t = A \cdot A^t$) und positiv definit ($\vec{v}^t \cdot A \cdot A^t \cdot \vec{v} = (A^t \cdot \vec{v})^t \cdot (A \cdot \vec{v}) = |\vec{y}|^2 \geq 0$ für $y := A \cdot \vec{v}$. "=" gilt nur für $\vec{v} = A^{-1} \cdot \vec{y} = \vec{0}$).

Daher gibt es nach dem Satz über die Hauptachsentransformation eine orthogonale Matrix P und eine Diagonalmatrix D, mit

$$A \cdot A^t = P \cdot D \cdot P^t$$

Mit $D = diag(\lambda_1 \ldots, \lambda_n)$, wobei $\lambda_I > 0$ für alle i. Setze

$$\sqrt{D} := diag(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n})$$

und

$$\Sigma := P \cdot \sqrt{D} \cdot P^t \text{ und } O := \Sigma^{-1} \cdot A$$

Dann ist Σ symmetrisch und positiv definit und

$$O \cdot O^t = \Sigma^{-1} \cdot A \cdot A^t \cdot \left(\Sigma^{-1}\right)^t$$

$$= P \cdot \sqrt{D}^{-1} \cdot P^t \cdot P \cdot D \cdot P^t \cdot P \cdot \sqrt{D}^{-1} \cdot P^t = E$$

Definition: Für eine positiv definite, symmetrische Matrix definieren wir

$$\sqrt{\Sigma} := P \cdot \sqrt{D} \cdot P^t$$

Diese ist wegen $(P\sqrt{D}P^t)^t = P\sqrt{D}P^t$ auch symmetrisch.

2.) Eindeutigkeit (kann beim ersten Studium überlesen werden)

Eine Diagonalieserung einer Matrix ist im wesentlichen eindeutig: Sind $P \cdot D_1 \cdot P^t$ und $P \cdot D_2 \cdot P^t$ zwei Diagolasierungen, so stehen in beiden Diagonalmatrizen die Eigenwerte auf der Diagonalen, Sie können sich also nur durch die Reihenfolge unterscheiden.

Somit sind auch die Wurzeln von positiv definiten Matrizen eindeutig.

Ist $A = \Sigma \cdot O$ eine Polarzerlegung, so ist $A \cdot A^t = \Sigma \cdot O \cdot O^{-1} \cdot \Sigma = \Sigma^2$. Ist $A = \Sigma' \cdot O'$ eine weitere Polarzerlegung, so gilt analog $A \cdot A^t = \Sigma'^2$, und wegen der Eindeutigkeit der Wurzeln folgt: $\Sigma = \Sigma'$ und daraus $O = O'$.

Bemerkung : Die Inverse einer symmetrischen Matrix ist wieder symmetrisch: $(S^{-1})^t = (S^t)^{-1} = S^{-1}$

ii) Das Produkt symmetrischer Matrizen ist i.a. nicht wieder symmetrisch:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Bemerkung: Neben der obigen Zerlegung $A = \Sigma_l \cdot O$ gibt es auch die Zerlegung $A = O \cdot \Sigma_r$, denn

$$A = \Sigma_l \cdot O = O \cdot O^t \cdot \Sigma_l \cdot O = O \cdot \Sigma_r \text{ , mit } \Sigma_r = O^t \cdot \Sigma_l \cdot O$$

Dabei ist Σ_l ebenfalls symmetrisch und positiv definit.

Weiter ist

$$A \cdot A^t = \Sigma_l \cdot O \cdot O^t \cdot \Sigma_l = \Sigma_l^2 =: C_l$$

und

$$A^t \cdot A = \Sigma_r \cdot \cdot O^t \cdot O \cdot \Sigma_r = \Sigma_r^2 =: C_r$$

Diese heißen auch linker und rechter Cauchyscher Verzerrungstensor.

Satz: Singulärwertzerlegung

Sei A eine invertierbare Matrix. Dann existieren orthogonale Matrizen U und V und eine Diagonalmatrix D, mit:

$$A = U \cdot \sqrt{D} \cdot V^t$$

Grund : Ist $A = \Sigma \cdot O$ eine Polarzerlegung, so ist

$$A = P \cdot \sqrt{D} \cdot P^t \cdot O$$

Setze $U := P$ und $V := O^t \cdot P$. Dann ist $V \cdot V^t = O^t \cdot P \cdot P^t \cdot O = E$. Die Einträge von $\sqrt{D}$ sind die Singulärwerte.

Bemerkung: Der letzte Satz gilt allgemeiner für beliebige Matrizen A und dann sind U und V orthogonale Matrizen passender Größe.

Zusammenhang mit der Moore-Penrose-Inversen: Ist $A = UDV^t$ Singulärwertzerlegung von A, so gilt:

$$A^+ = UD^+V^t$$