Eigenwerte und Eigenvektoren

Vorbemerkung: Ist die $n \times n-$Matrix invertierbar, so hat das lineare Gleichungssystem $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ für jedes $\vec{b}$ genau eine Lösung, nämlich $\vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b}$.

Grund: i) $A \cdot \vec{x} = A \cdot A^{-1}\vec{b} = \vec{b}$,

ii) Ist $\vec{y}$ eine weitere Lösung, also $A \cdot \vec{y} = \vec{b}$, so gilt: $A \cdot \vec{x} = A \cdot \vec{y}$. Also liefert Multiplikation mit A^{-1} von links: $\vec{x} = \vec{y}$.

Hat umgekehrt jedes LGS $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ eine Lösung, so ist die Matrix A invertierbar.

Grund: Für $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ gibt es die Lösungen $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n$, mit $A \cdot \vec{x}_i = \vec{e}_i$. Daher gilt

$$A \cdot (\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n) = (A \cdot \vec{x}_1, \ldots, A \cdot \vec{x}_n) = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n) = E_n$$

Definition: Eine Matrix A heißt injektiv , wenn gilt: Ist $A \cdot \vec{x} = A \cdot \vec{y}$, so folgt $\vec{x} = \vec{y}$. Eine Matrix A heißt surjektiv, falls es zu jedem $\vec{y}$ ein $\vec{x}$ gibt, mit $A \cdot \vec{x} = \vec{y}$.

Bemerkung: Eine quadratische Matrix A ist genau dann injektiv, wenn $A \cdot \vec{x} = \vec{0}$ nur die Lösung $\vec{x} = \vec{0}$ hat.

Grund: Gibt es eine weiter Lösung $\vec{y} \neq \vec{0}$, so ist $A \cdot \vec{y} = A \cdot \vec{0}$, also A nicht injektiv. Ist A nicht injektiv, so gibt es $\vec{x} \neq \vec{y}$, mit $A \cdot \vec{x} = A \cdot \vec{y}$, also $A \cdot (\vec{x} - \vec{y}) = \vec{0}$ und $\vec{x} - \vec{y} \neq 0$.

Lemma: Eine $m \times n$ Matrix A mit $n > m$ ist nie injektiv.

Grund (Heuristik): A definiert eine Abbildung $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Eine injektive Matrix bildet jedoch jeweils zwei verschiedene Vektoren auf wiederum auf verschiedene Vektoren ab. Da $n > m$ ist, wird ein größerer Raum auf einen kleineren abgebildet. Beides zusammen kann nicht funktionieren.

Folgerung: Zu Vektoren $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_m \in \mathbb{R}^n$ mit $m > n$ gibt es $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ (nicht alle gleich 0), mit $\lambda_1\vec{x}_1 + \ldots + \lambda_m\vec{x}_m = \vec{0}$.

Grund: Die $n \times m-$Matrix $A = (x_1, \ldots, x_m)$ ist wegen $m > n$

nicht injektiv. Also gibt es einen Vektor $\vec{\lambda} \in \mathbb{R}^m$, $\vec{\lambda} \neq \vec{0}$, mit $A \cdot \vec{\lambda} = \vec{0}$

Definition: Für eine $n \times n-$ Matrix A heißt ein Vektor $\vec{v} \neq \vec{0}$ Eigenvektor von A zum Eigenwert λ, wenn

$$A \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \vec{v}$$

also wenn

$$(A - \lambda E_n) \cdot \vec{v} = 0$$

Beispiel: 1) Der Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ ist Eigenvektor von $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$ zum Eigenwert 3, denn

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

2) Für eine $n \times n-$Diagonalmatrix gilt:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \cdot \vec{e}_i = \lambda_i \cdot \vec{e}_i$$

3) Für eine diagonalisierbare Matrix A gilt: $A \cdot P = P \cdot D$. Definieren wir die Vektoren $v_i := P \cdot \vec{e}_i$, so gilt:

$$A \cdot P \cdot \vec{e}_i = P \cdot D \cdot \vec{e}_i = P \cdot (\lambda_i \vec{e}_i) = \lambda_i P \cdot \vec{e}_i$$

also

$$A \cdot \vec{v}_i = \lambda_i \vec{v}_i$$

Bestimmung von Eigenwerten

Erinnerung: Die Determinante einer $2 \times 2-$Matrix ist

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

Weiter ist

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Allgemein ist die Determinante einer $n \times n-$Matrix definiert als

$$\det(A) := \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_{k1} det(A_{k1})$$

wobei Matrix A_{k1} die Matrix bezeichnet, die entsteht, wenn man aus A die erste Spalte und die $k-$te Zeile streicht.

Eigenschaften der Determinante:

a) A ist invertierbar $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$

b) $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$

c) $\det(A^t) = \det(A)$

Es ist für eine $n \times n-$Matrix:

$$A \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \vec{v} \;\Leftrightarrow\; (A - \lambda \cdot E_n) \cdot \vec{v} = \vec{0}$$

Die rechte Seite ist ein lineares Gleichungssystem, welches genau dann eine Lösung verschieden von $\vec{0}$ hat, wenn

$$\det(A - \lambda \cdot E_n) = 0$$

ist.

Definition: $\chi_A := \det(A - \lambda \cdot E_n)$ heißt das charakteristische Polynom der Matrix A. Seine Nullstellen sind also die Eigenwerte der Matrix A

Beispiel: 1) Für die Drehmatrix $D_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ ist $\chi_{D_\varphi} = \det D_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\lambda - \sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi - \lambda \end{pmatrix} = (\cos\varphi - \lambda)^2 + \sin\varphi^2$. Dieser Ausdruck wird genau dann 0, wenn jeder Summand 0 ist. Aus $\sin\varphi^2 = 0$ folgt: $\varphi = 0$ oder $\varphi = \pi$ und damit $\lambda_{1,2} = \cos\varphi = 1, -1$. Also hat die Matrix für $\varphi \neq 0, \pi$ keine Eigenwerte.

2) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$. Dann ist $\chi_A = \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 \\ 8 & -1-\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda)\cdot(-1-\lambda)$

Damit sind die Nullstellen, also die Eigenwerte von A, die Werte -1 und 3. Die Eigenvektoren erhält man also Lösungen von:

$$\begin{pmatrix} 3-3 & 0 \\ 8 & -1-3 \end{pmatrix} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 8 & -4 \end{pmatrix} \cdot \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} t \\ 2\cdot t \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} 3-(-1) & 0 \\ 8 & -1-(-1) \end{pmatrix} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 8 & 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}$$

Eigenwerte von symmetrischen Matrizen

Wir betrachten zunächst den Fall einer symmetrischen $2\times 2-$Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$. Ist $b=0$, so ist die Matrix bereits in Diagonalgestalt und nichts ist zu tun. Sei also $b \neq 0$

Das charakteristische Polynom von A lautet :

$$\chi_A(t) = t^2 - (c+a)t + ac - b^2$$

Nach der $p-q-$Formel sind die Nullstellen hiervon:

$$t_{1,2} = \frac{c+a}{2} \pm \sqrt{\frac{(c+a)^2 - 4ac + 4b^2}{4}} = \frac{c+a}{2} \pm \sqrt{\frac{(c-a)^2 + 4b^2}{4}}$$

Man beachte, daß der Ausdruck

$$\Delta := \frac{(c-a)^2 + 4b^2}{4}$$

strikt positiv ist, also $t_1 \neq t_2$. Es gibt also zwei Eigenvektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ zu zwei verschiedenen Eigenwerten. Unten werden wir sehen, daß diese beiden orthogonal sind. Wir können weiter annehmen, daß die beiden Eigenvektoren normiert sind. Wir setzen $P := (\vec{v}_1, \vec{v}_2)$. Dann gilt:

$$AP = A(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = (A\vec{v}_1, A\vec{v}_2) = (t_1\vec{v}_1, t_2\vec{v}_2) = P \begin{pmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & t_2 \end{pmatrix}$$

Außerdem ist P orthogonal, denn es ist

$$P^tP = \begin{pmatrix} \vec{v}_1^t \\ \vec{v}_2^t \end{pmatrix} (\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \begin{pmatrix} \vec{v}_1^t\vec{v}_1 & \vec{v}_1^t\vec{v}_2 \\ \vec{v}_2^t\vec{v}_1 & \vec{v}_2^t\vec{v}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\vec{v}_1|^2 & <\vec{v}_1, \vec{v}_2> \\ <\vec{v}_2, \vec{v}_1> & |\vec{v}_2|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) A hat nur reelle Eigenwerte

b) Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal

Grund: zu a) Wir erinnern uns, daß für komplexe Zahlen gilt : $z \cdot \bar{z} = |z|^2 \in \mathbb{R}$. Die komplexe Konjugation von Vektoren und Matrizen wird komponentenweise definiert. Dann gilt:

$$\overline{\lambda\vec{v}} \cdot \vec{v} = \overline{(\lambda\vec{v})}^t \vec{v} = \overline{A\vec{v}}^t \cdot \vec{v} = \overline{\vec{v}} \cdot \overline{A}^t \cdot \vec{v} = \overline{\vec{v}} \cdot A \cdot \vec{v} = \lambda\overline{\vec{v}} \cdot \vec{v}$$

Daraus erhält man $\lambda = \bar{\lambda}$, also $\lambda \in \mathbb{R}$.

zu b) Seien $\vec{v}_1$und $\vec{v}_2$ Eigenvektoren zu den beiden verschiedenen Eigenwerten λ_1 und λ_2. Dann gilt:

$$\lambda_1 \vec{v}_1{}^t \cdot \vec{v}_2 = (A \cdot \vec{v}_1)^t \cdot \vec{v}_2 = \vec{v}_1{}^t \cdot A^t \cdot \vec{v}_2 =$$

$$= \vec{v_1^t} \cdot A \cdot \vec{v}_2 = \vec{v}_1{}^t \cdot (\lambda_2 \cdot \vec{v}_2) = \lambda_2 \cdot \vec{v}_1{}^t \cdot \vec{v}_2$$

Also ist

$$0 = \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_2)}_{\neq 0} \cdot \vec{v}_1{}^t \cdot \vec{v}_2$$

also die Behauptung.

Folgerung: Hat eine symmetrische Matrix A n verschiedene Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ mit den zugehörigen normierten Eigenvektoren $\vec{p}_1, \ldots, \vec{p}_n$, so ist

$$A = P \cdot diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \cdot P^t$$

wo die $\vec{p}_i$ die Spaltenvektoren der Matrix P sind. Darüberhinaus ist P orthogonal.

Grund: Es ist $P^t \cdot P = \begin{pmatrix} \vec{p}_1{}^t \\ \vdots \\ \vec{p}_n{}^t \end{pmatrix} \cdot (\vec{p}_1, \ldots, \vec{p}_n) = \begin{pmatrix} \vec{p}_1{}^t \cdot \vec{p}_1 & \cdots & \vec{p}_1{}^t \cdot \vec{p}_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \vec{p}_n{}^t \cdot \vec{p}_1 & \cdots & \vec{p}_n{}^t \cdot \vec{p}_n \end{pmatrix} = E_n$

da die $\vec{p}_i$ paarweise orthogonal und normiert sind.

Weiter ist: $P \cdot diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_2) = (\lambda_1 \cdot \vec{p}_1, \ldots, \lambda_n \cdot \vec{p}_n)$

und: $A \cdot P = (A \cdot \vec{p}_1, \ldots, A \cdot \vec{p}_n) = (\lambda_1 \cdot \vec{p}_1, \ldots, \lambda_n \cdot \vec{p}_n)$

Die Gram-Schmid-Orthonormalisierung: Ist $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n \in \mathbb{R}^n$ eine Basis, so bilden die Vektoren

$$\vec{v}_1' := \vec{v}_1, \ldots, \ \vec{v}_k' := \vec{v}_k - \sum_{j=1}^{k} \frac{\vec{v}_k \cdot \vec{v}_j'}{\vec{v}_j' \cdot \vec{v}_j'} \vec{v}_j'$$

nach Normierung eine Orthonormalbasis, d.h. eine Basis für die zusätzlich gilt:

$$\vec{v}_i' \cdot \vec{v}_j' = 0 \text{ für } i \neq j$$

und

$$\vec{v}_i \cdot \vec{v}_i = 1 \text{ für alle } i$$

Die Vektoren stehen also alle paarweise senkrecht aufeinander und haben die Länge eins.

Satz: Für reelle Matrizen sind äquivalent:

i) Jede symmetrische Matrix ist orthogonal diagonalisierbar

ii) Jede symmetrische Matrix ist diagonalisierbar

iii) Jede symmetrische Matrix hat einen Eigenwert

Grund: Klarerweise gelten die Folgerungen $i) \Rightarrow ii) \Rightarrow iii)$

$iii) \Rightarrow i)$: Sei A eine reelle, symmetrische $n \times n-$Matrix. Dann hat A einen Eigenwert λ mit zugehörigem Eigenvektor v_1, den wir als normiert annehmen. Diesen ergänzen wir zu einer Orthonormalbasis $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ von $\mathbb{R}^n$ (Gram-Schmidt Orthogonalisierung).

Dann ist $P := (\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n)$ eine orthogonale Matrix. Es sei

$$B := P^{-1}AP$$

Da P orthogonal ist, ist B wieder symmetrisch.

Es ist $P\vec{e}_i = v_i$, also ist die erste Spalte von B :

$$B\vec{e}_1 = P^{-1}AP\vec{e}_1 = P^{-1}A\vec{v}_1 = P^{-1}\lambda\vec{v}_1 = \lambda P^{-1}\vec{v}_1 = \lambda\vec{e}_1$$

Daraus ergibt sich wegen der Symmetrie von B:

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & B_0 & \\ 0 & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

mit einer symmetrischen $n-1 \times n-1-$Matrix B_0. Per Induktion gibt es eine orthogonale $n-1 \times n-1-$Matrix R_0, mit $R_0^{-1}B_0R_0 = diag(\lambda_2, \ldots, \lambda_n) =: D$

Es sei

$$R := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & R_0 & \\ 0 & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

Dann ist

$$(PR)^{-1}A(PR) = R^{-1}BR =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & R_0^t & \\ 0 & & & \\ & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & B_0 & \\ 0 & & & \\ & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & R_0 & \\ 0 & & & \\ & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & D & \\ 0 & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

Satz (Hauptachsentransformation): Zu jeder symmetrischen Matrix gibt es eine orthogonale Matrix P und eine Diagonalmatrix D, so daß $A = PDP^t$.

Grund: Wir nehmen an, die Beauptung sei richtig für alle symmetrischen $n-1 \times n-1-$Matrizen. Wir schreiben die Matrix A wie folgt als Blockmatrix auf:

$$\begin{pmatrix} A' & \vec{b} \\ \vec{b}^t & d \end{pmatrix}$$

mit einer symmetrischen $n-1 \times n-1-$Matrix A', $\vec{b} \in \mathbb{R}^{n-1}$ und $d \in \mathbb{R}$.

1.Fall: Ist $d \neq 0$, so definieren wir $\vec{x} := -\frac{1}{d}\vec{b}$. Wir haben nun:

$$\begin{pmatrix} E_{n-1} & \vec{x} \\ \vec{0}^t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A' & \vec{b} \\ \vec{b}^t & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{n-1} & \vec{0} \\ \vec{x}^t & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A' + \vec{x}\vec{b}^t & \vec{b} + d\vec{x} \\ \vec{b}^t & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{n-1} & \vec{0} \\ \vec{x}^t & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A' + \vec{x}\vec{b}^t + \vec{b}\vec{x}^t + d\vec{x}\vec{x}^t & \vec{b} + d\vec{x}^t \\ \vec{b}^t + d\vec{x}^t & d \end{pmatrix}$$

Also ist A diagonalisierbar. Der obige Satz sagt uns nun, daß A sogar orthogonal diagonalisierbar ist.

2.Fall: $d = 0$: Sei $b_i \neq 0$, dann $\vec{y}^t := (0, \ldots, \delta, \ldots 0)$ (δ an der $i-$ten Stelle).

Dann ist

$$\begin{pmatrix} E_{n-1} & \vec{0} \\ \vec{y}^t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A' & \vec{b} \\ \vec{b}^t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{n-1} & \vec{y} \\ 0^t & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * \\ * & \delta^2 a_{ii} + 2\delta b_i \end{pmatrix}$$

Dann wähle δ mit $\delta^2 a_{ii} + 2\delta b_i \neq 0$ und wir sind wieder in Fall 1.

Beispiel: $A : matrix([1,2,0],[2,1,2],[0,2,1]);$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Der Befehl uniteigenvectors(A) liefert eine Liste zurück. Deren erstes Element ist eine Liste von Eigenwerten und ihren Vielfachheiten:

$$first(uniteigenvectors(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}))$$

$$\left[\left[1 - 2^{\frac{3}{2}}, 2^{\frac{3}{2}} + 1, 1\right], [1,1,1]\right]$$

Der zweite Teil der Liste ist eine Liste der zugehörigen normierten Eigenvektoren:

$$second(uniteigenvectors(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}))$$

$$\left[\left[\left[\frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right]\right], \left[\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right]\right], \left[\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right]\right]\right]$$

Wir erstellen daraus die Matrix P :

$P : matrix([1/2, 1/2, 1/sqrt(2)], [-1/sqrt(2), 1/sqrt(2), 0], [1/2, 1/2, -1/sqrt(2)]);$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Es ist:

$transpose(P).P;$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und:

$ratsimp(transpose(P).A.P);$

$$\begin{pmatrix}1-2^{\frac{3}{2}} & 0 & 0\\ 0 & 2^{\frac{3}{2}}+1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Hier ist ratsimp eine Maximafunktion zur Termvereinfachung.