

Universität Bonn
Mathematisches Institut
Dr. Michael Welter

**Übungen zum
Vorkurs Mathematik für Studienanfänger
2013**

Einige Zeichen und Konventionen:

$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ – Die Menge der natürlichen Zahlen

$\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$

$\mathbb{Z} := \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ – Die Menge der ganzen Zahlen

\mathbb{Q} – Die Menge der rationalen Zahlen

\mathbb{R} – Die Menge der reellen Zahlen

$\mathbb{P} := \{2, 3, 5, 7, 11, \dots\}$ – Die Menge der Primzahlen

\sum – Summenzeichen, also z.B. $\sum_{i=0}^n x_i = x_0 + x_1 + \dots + x_n$

\prod – Produktzeichen, also z.B. $\prod_{i=0}^n x_i = x_0 \cdot x_1 \cdot \dots \cdot x_n$

Ein leeres Produkt ist gleich 1, eine leere Summe 0.

Am Freitag, den 27.09., gibt es anstelle der Vorlesung eine **Studienberatung** und Informationen zum Thema **Auslandsstudium** durch Herrn Dr. Thoralf Räsch.

Die folgenden Aufgaben sind für **Dienstag, den 17.09.**, vorzubereiten:

Aufgabe 1: Es seien A und B Aussagen. Wir definieren neue Aussagen $A \wedge B, A \vee B, \neg A$: Die Aussage $A \wedge B$ ist genau dann wahr, wenn die beiden Aussagen A und B wahr sind, die Aussage $A \vee B$ ist genau dann wahr, wenn mindestens eine der beiden Aussagen A und B wahr ist und die Aussage $\neg A$ ist genau dann wahr, wenn A falsch ist. Fertigen Sie Wahrheitstabellen für die Aussagen

(i) $A \wedge B, A \vee B$ und $\neg A$,

(ii) $(\neg B) \Rightarrow (\neg A)$,

(iii) $\neg((\neg B) \wedge A)$

an.

Aufgabe 2: Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion:

(i) Für $n \geq 1$ gilt

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

(ii) Für $n \geq 3$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{2^{k+1}}{k} < \frac{2^{n+2}}{n}.$$

Aufgabe 3: Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $q \in \mathbb{R}, q \neq 1$, gilt

$$\sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Folgern Sie hieraus für $a, b \in \mathbb{R}$

$$a^n - b^n = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}.$$

Was ergibt sich für $n = 2$?

Die folgenden Aufgaben sind für **Mittwoch, den 18.09.**, vorzubereiten:

Aufgabe 4: (Binomialkoeffizienten)

Die Fakultät $n!$ ist für $n \in \mathbb{N}_0$ rekursiv definiert durch $0! := 1$ und $n! := n \cdot (n-1)!$. Weiter definieren wir für $m \in \mathbb{N}_0$ und $k \in \{0, 1, 2, \dots, m\}$ den Binomialkoeffizienten $\binom{m}{k}$ (lies: m über k) durch

$$\binom{m}{k} := \frac{m!}{(m-k)!k!}.$$

Zeigen Sie für $m \in \mathbb{N}_0$ und $k \in \{0, 1, 2, \dots, m\}$ die folgenden Aussagen

(i) $\binom{m}{k} = \binom{m}{m-k}$.

(ii) $\binom{m+1}{k+1} = \binom{m}{k+1} + \binom{m}{k}$.

Bemerkung: Hier setzen wir $\binom{m}{m+1} := 0$.

(iii) $\binom{m}{k} \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 5: Es sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

(i) Für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Diese Aussage bezeichnet man als den binomischen Lehrsatz.

(ii) Folgern Sie aus (i): Für $k \in \{0, \dots, n\}$ gilt $\binom{n}{k} \leq 2^n$.

Aufgabe 6:

(i) Zeigen Sie, dass sich jede ungerade Zahl $n \geq 3$ als Differenz von zwei aufeinanderfolgenden Quadratzahlen darstellen läßt.

(ii) Bestimmen Sie alle Darstellungen der Zahlen 15, 19, 27 als Differenz von zwei (nicht notwendigerweise aufeinanderfolgenden) Quadratzahlen.

Bemerkung: Geben Sie ein Argument an, warum Sie wirklich alle Darstellungen gefunden haben.

- (iii) Zeigen Sie, dass eine ungerade Zahl $n \geq 3$ genau dann Primzahl ist, wenn sie nur eine Darstellung als Differenz von zwei Quadratzahlen besitzt.

Hinweise: Beachten Sie, dass hier eine Äquivalenz zu zeigen ist, d.h. Sie müssen zum einen zeigen, dass jede Primzahl nur eine Darstellung besitzt, und zum anderen, dass jede zusammengesetzte Zahl mindestens 2 Darstellungen besitzt. Bei beidem sind die binomischen Formeln äußerst hilfreich.

Die folgenden Aufgaben sind für **Donnerstag, den 19.09.**, vorzubereiten:

Aufgabe 7: Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, dass für alle natürlichen Zahlen n gilt:

- (i) $3|n^3 + 2n$,
- (ii) $7|2^{3n} - 1$,
- (iii) $3|2^n + (-1)^{n+1}$.

Tipps: Betrachten Sie $a_{n+1} - a_n$, wobei a_n jeweils der Ausdruck rechts vom $|$ ist.

Aufgabe 8: Es sei n eine ungerade natürliche Zahl. Beweisen Sie:

- (i) $n|\sum_{k=1}^n k$,
- (ii) $n^2|\sum_{k=1}^n k^3$,
- (iii) $n^2|\sum_{k=1}^n k^n$.

Tipps zu (iii): Es ist $2\sum_{k=1}^n k^n = \sum_{k=0}^n (k^n + (n-k)^n)$ (Warum?). Wenden Sie dann den binomischen Lehrsatz an.

Aufgabe 9: Es seien $a, b, c, d \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Zeigen Sie:

- (i) Jede 6-stellige Zahl der Form $abcabc$ ist durch 7, durch 11 und durch 13 teilbar.
- (ii) Jede 8-stellige Zahl der Form $abcdabcd$ ist durch 73 und 137 teilbar.

Die folgenden Aufgaben sind für **Freitag, den 20.09.**, vorzubereiten:

Aufgabe 10:

- (i) Es seien $n, m \in \mathbb{Z}$ und $d := \text{ggT}(n, m)$. Zeigen Sie: $\text{ggT}\left(\frac{n}{d}, \frac{m}{d}\right) = 1$, d.h. $\frac{n}{d}$ und $\frac{m}{d}$ sind teilerfremd.
- (ii) Bestimmen Sie ein Tupel (x, y) ganzer Zahlen, so dass

$$4641x + 6615y = 105.$$

Aufgabe 11: (Die Fibonacci-Zahlen)

Eine Folge (oder genauer eine reelle Zahlenfolge) ist nichts anderes als eine Abbildung der natürlichen Zahlen in die reellen Zahlen, also eine Abbildung $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$. Statt $f(n)$ schreibt man aber gerne f_n und für die Folge dann $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ oder kürzer (f_n) .

Die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ der sog. *Fibonacci-Zahlen* ist rekursiv definiert durch die Vorschrift $f_1 := 1, f_2 := 1$ und $f_n := f_{n-1} + f_{n-2}$ für $n \geq 3$. Weiter seien $a := \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ und $b := \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})$, so dass a und b offensichtlich die Lösungen der quadratischen Gleichung $x^2 - x - 1 = 0$ sind. Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$f_n := \frac{1}{\sqrt{5}}(a^n - b^n).$$

Aufgabe 12: Es bezeichne $\tau(n)$ die Anzahl der positiven Teiler der natürlichen Zahl n und $\nu_p(n)$ die Vielfachheit von p in n , also den Exponenten der Primzahl p in der Primfaktorzerlegung von n .

- (i) Zeigen Sie: $\tau(n) = \prod_{p \in \mathbb{P}} (\nu_p(n) + 1)$.
- (ii) Bestimmen Sie alle Vielfachen von 12 mit genau zwei Primteilern und genau 14 Teilern.
- (iii) Bestimmen Sie alle Vielfachen von 30 mit genau 30 Teilern.

Die folgenden Aufgaben sind für **Montag, den 23.09.**, vorzubereiten:

Aufgabe 13:

- (i) Es seien $m_1, \dots, m_k \in \mathbb{Z}$ paarweise teilerfremd, $m := m_1 \cdot \dots \cdot m_k$ und $a, b \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie:

$$a \equiv b \pmod{m_\ell} \text{ für } \ell = 1, \dots, k \iff a \equiv b \pmod{m}$$

- (ii) Falls für $a_i, b_i \in \mathbb{Z}$ die Kongruenzen

$$a_i \equiv b_i \pmod{m} \text{ für } i = 1, \dots, n$$

gültig sind, so gilt auch

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n a_i &\equiv \sum_{i=1}^n b_i \pmod{m} \\ \prod_{i=1}^n a_i &\equiv \prod_{i=1}^n b_i \pmod{m}. \end{aligned}$$

Aufgabe 14: (Teilbarkeitskriterien)

Es sei $a = \sum_{k=0}^n a_k \cdot 10^k$ die Dezimalentwicklung der Zahl $a \in \mathbb{N}$ und $s := \sum_{k=0}^n a_k$ ihre Quersumme. Zeigen Sie mit der vorhergehenden Aufgabe:

$$\begin{aligned} 3|a &\iff 3|s \\ 9|a &\iff 9|s. \end{aligned}$$

Gibt es eine ähnliche Regel für die Division durch 11?

Aufgabe 15: (Der kleine Satz von Fermat)

- (i) Zeigen Sie, dass für alle $a, b \in \mathbb{Z}$ und Primzahlen p

$$(a + b)^p \equiv a^p + b^p \pmod{p}$$

gilt. Was gilt also (induktiv) für $(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^p$?

Tipp: Überlegen Sie sich, dass $\binom{p}{k} \equiv 0 \pmod{p}$ für $1 \leq k \leq p-1$ ist, und wenden Sie den Binomischen Lehrsatz an.

- (ii) Folgern Sie hieraus: Für alle $a \in \mathbb{Z}$ gilt $a^p \equiv a \pmod{p}$.

Hinweis: Man betrachte zunächst den Fall $a \geq 0$ und führe dann den Fall $a < 0$ auf diesen zurück. Dabei unterscheide man die Fälle $p = 2$ und p ungerade.

Die folgenden Aufgaben sind für **Dienstag, den 24.09.**, vorzubereiten:

Aufgabe 16:

- (i) Zeigen Sie, dass $M_k := 2^k - 1$ höchstens dann eine Primzahl ist, wenn k eine Primzahl ist.

Tipp: Aufgabe 3.

- (ii) Es seien p und q ungerade Primzahlen. Zeigen Sie: Ist p ein Primteiler von M_q (also $2^q \equiv 1 \pmod{p}$), so gilt $p \equiv 1 \pmod{q}$.

Tipp: Kleiner Satz von Fermat. Man betrachte dann den $\text{ggT}(q, p - 1)$.

- (iii) Der kleinste mögliche Primteiler von M_{251} ist also 503. Zeigen Sie, dass 503 tatsächlich ein Teiler von M_{251} ist.

Tipp: Dieser Aufgabenteil, der natürlich unabhängig von (i) und (ii) gelöst werden kann, ist mit etwas Rechenarbeit verbunden. Was ist 2^{252} modulo 503?

Bemerkung: Primzahlen der Form $M_p = 2^p - 1$ nennt man Mersenne-Primzahlen. Die größte bekannte Mersenne-Primzahl (und die größte bekannte Primzahl überhaupt) ist zur Zeit $M_{57.885.161}$. Dies ist die 48. gefundene Mersenne-Primzahl. Sie hat 17.425.170 Ziffern. Zur Zeit sind auch 48 Mersenne-Primzahlen bekannt. Beim Vorkurs 2010 waren 47 Mersenne-Primzahlen bekannt. Die größte damals bekannte Mersenne-Primzahl war aber die 45. gefundene Mersenne-Primzahl, da die 46. und die 47. gefundenen MP kleiner als die 45. waren. (Quelle: <http://www.mersenne.org>; Stand: 16.08.2013).

Aufgabe 17: (Goldbachs Beweis des Satzes von Euklid)

Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei $F_n := 2^{2^n} + 1$ die sogenannte n -te Fermat-Zahl.

- (i) Zeigen Sie, dass $F_n - 2 = \prod_{i=0}^{n-1} F_i$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

- (ii) Folgern Sie hieraus, dass für je zwei $i, j \in \mathbb{N}$ mit $i \neq j$ die Zahlen F_i und F_j teilerfremd sind, dass also $\text{ggT}(F_i, F_j) = 1$ ist.

- (iii) Folgern Sie hieraus, dass es unendlich viele Primzahlen gibt.

Bemerkung: Es ist per definitionem $a^{b^c} = a^{(b^c)}$.

Aufgabe 18: (Aus einem chinesischen Rechenbuch)

Eine Bande von 17 Räubern stahl einen Sack mit Goldstücken. Als sie ihre

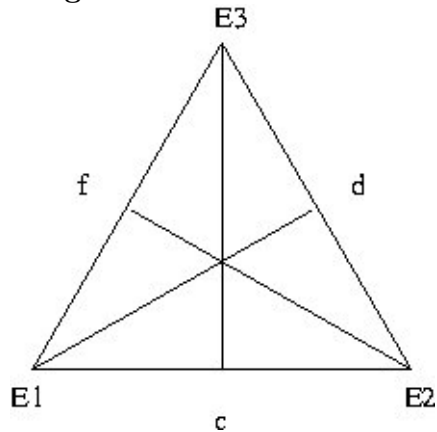
Beute in gleiche Teile teilen wollten, blieben 3 Goldstücke übrig. Beim Streit darüber, wer ein Goldstück mehr erhalten sollte, wurde ein Räuber erschlagen. Jetzt blieben bei der Verteilung 10 Goldstücke übrig. Erneut kam es zum Streit, und wieder verlor ein Räuber sein Leben. Jetzt liess sich endlich die Beute gleichmäßig verteilen. Wie viele Goldstücke waren mindestens im Sack?

Die folgenden Aufgaben sind für **Mittwoch, den 25.09.**, vorzubereiten:

Aufgabe 19: Prüfen Sie auf Assoziativität und Kommutativität:

- (\mathbb{Q}, \diamond) mit $x \diamond y := \frac{x+y}{2}$
- $(\mathbb{Z}, -)$
- (\mathbb{N}, \star) mit $x \star y := x^y$
- (\mathbb{N}, Δ) mit $x \Delta y := x$
- $(\{-1, 0, 1\}, \heartsuit)$ mit $x \heartsuit y := x \cdot y^3$ (Verknüpfungstafel)

Aufgabe 20:



Wir betrachten die Deckbewegungen des gleichseitigen Dreiecks $E_1E_2E_3$:

- D_{120} Drehung um 120 Grad (entgegen dem Uhrzeigersinn)
- D_{240} Drehung um 240 Grad
- D_0 Drehung um 0 Grad
- W_c, W_d, W_f Wendungen um die entsprechende Achse

Die drei Achsen c, d, f sind nicht Teil des Dreiecks und bleiben bei allen Bewegungen fix.

Stellen Sie eine Verknüpfungstafel für $(\{D_0, D_{120}, D_{240}, W_c, W_d, W_f\}, \star)$ auf, wobei \star die Hintereinanderausführung der Deckbewegungen sei. Suchen Sie in der Tafel neutrale und inverse Elemente. Untersuchen Sie die Verknüpfung auf Kommutativität.

Aufgabe 21: Es seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Ein Schema

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

bezeichnet man als (zweireihige) Matrix (reeller Zahlen). Die Menge aller zweireihigen Matrizen reeller Zahlen bezeichnen wir mit $M_2(\mathbb{R})$. Die Determinante dieser Matrix ist gegeben durch

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc.$$

Zwei Matrizen

$$M_1 := \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \text{ und } M_2 := \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$$

sind genau dann gleich, wenn $a_1 = a_2, b_1 = b_2, c_1 = c_2$ und $d_1 = d_2$ ist. Für zwei Matrizen M_1 und M_2 wie zuvor sei das Produkt der Matrizenmultiplikation definiert durch

$$M_1 \cdot M_2 := \begin{pmatrix} a_1 a_2 + b_1 c_2 & a_1 b_2 + b_1 d_2 \\ c_1 a_2 + d_1 c_2 & c_1 b_2 + d_1 d_2 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie:

- (i) $(M_2(\mathbb{R}), \cdot)$ ist assoziativ, aber nicht kommutativ. Es existiert ein neutrales Element, aber nicht jedes Element besitzt ein Inverses.
- (ii) Für $M_1, M_2 \in M_2(\mathbb{R})$ gilt $\det(M_1 \cdot M_2) = \det M_1 \cdot \det M_2$.

Falls Ihnen die vorstehende Aufgabe zu langweilig ist:

Aufgabe 22: Sind a_0, a_1, \dots, a_n feste ganze Zahlen, so nennt man eine Funktion der Art $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ (hier ist $x^0 = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$) eine Polynomfunktion vom Grad n mit ganzzahligen Koeffizienten. Zeigen Sie, dass es keine solche Polynomfunktion mit einem Grad größer oder gleich 1 gibt, die alle natürlichen Zahlen auf Primzahlen abbildet.

Tipp: Ist $f(j) = p$ eine Primzahl, so betrachte man $f(j + kp) - f(j)$. Es darf ohne Beweis benutzt werden, dass eine Polynomfunktion vom Grad n höchstens n Nullstellen hat.

Die folgenden Aufgaben sind für **Donnerstag, den 26.09.**, vorzubereiten:

Aufgabe 23: Es bezeichne $M_2(\mathbb{Z})$ die Menge aller zweireihigen Matrizen ganzer Zahlen (d.h. $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$) und Γ sei die Menge aller $A \in M_2(\mathbb{Z})$ mit $\det A = 1$. Zeigen Sie, dass (Γ, \cdot) eine unendliche, nicht abelsche Gruppe ist.

Aufgabe 24: In dieser Aufgabe darf ohne Beweis benutzt werden, dass $\sqrt{2}$ irrational ist (Kennen Sie einen Beweis für diese Tatsache?). Wir betrachten die folgende Teilmenge der reellen Zahlen \mathbb{R} :

$$K := \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}.$$

Zeigen Sie, dass $(K, +)$ und $(K \setminus \{0\}, \cdot)$ abelsche Gruppen sind, wobei $+$ und \cdot die übliche Addition bzw. Multiplikation auf den reellen Zahlen bedeutet.

Bemerkung: Wo wird die Irrationalität von $\sqrt{2}$ benutzt?

Wir wissen, dass \mathbb{Q} und \mathbb{R} Körper sind. Diese Aufgabe zeigt also, dass es auch noch Körper “dazwischen” gibt, denn $\mathbb{Q} \subsetneq K \subsetneq \mathbb{R}$.

Aufgabe 25: (Noch einmal Fibonacci-Zahlen)

Es bezeichne f_n die n -te Fibonacci-Zahl (vgl. Aufgabe 11).

(i) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\begin{pmatrix} f_{n+2} & f_{n+1} \\ f_{n+1} & f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n+1}$$

(ii) Für alle $m, n \in \mathbb{N}$ gilt $f_{m+n} = f_{m-1}f_n + f_m f_{n+1}$. Man folgere hieraus, dass f_{mn} durch f_m teilbar ist.

(iii) $f_n f_{n+2} - (f_{n+1})^2 = (-1)^{n+1}$.

Tipp: Aufgabe 21.