

Primzahlen

Dr. Michael
Welter

Was wissen
wir über
Primzahlen?

Das Sieb des
Eratosthenes

Wieviele
Primzahlen
gibt es?

Weitere Fra-
gestellungen,
die
Primzahlen
beinhalten

Besondere
Primzahlen

Primzahlen

Dr. Michael Welter

Mathematisches Institut
Universität Bonn

<http://www.math.uni-bonn.de/people/welter>

Infotag 2007

31. Mai 2007

Primzahlen

Dr. Michael
Welter

Was wissen
wir über
Primzahlen?

Das Sieb des
Eratosthenes

Wieviele
Primzahlen
gibt es?

Weitere Fra-
gestellungen,
die
Primzahlen
beinhalten

Besondere
Primzahlen

Was wissen wir über Primzahlen?

Das Sieb des Eratosthenes

Wieviele Primzahlen gibt es?

Weitere Fragestellungen, die Primzahlen beinhalten

Besondere Primzahlen

Primzahlen

Dr. Michael
Welter

Was wissen
wir über
Primzahlen?

Das Sieb des
Eratosthenes

Wieviele
Primzahlen
gibt es?

Weitere Fra-
gestellungen,
die
Primzahlen
beinhalten

Besondere
Primzahlen

Definition

Eine *Primzahl* ist eine natürliche Zahl, die genau zwei Teiler (in den natürlichen Zahlen) hat, nämlich 1 und sich selber.

Primzahlen

Dr. Michael
Welter

Was wissen
wir über
Primzahlen?

Das Sieb des
Eratosthenes

Wieviele
Primzahlen
gibt es?

Weitere Fra-
gestellungen,
die
Primzahlen
beinhalten

Besondere
Primzahlen

Definition

Eine *Primzahl* ist eine natürliche Zahl, die genau zwei Teiler (in den natürlichen Zahlen) hat, nämlich 1 und sich selber.
Natürliche Zahlen ungleich 1, die keine Primzahlen sind, heißen *zusammengesetzt*.

Primzahlen

Dr. Michael
Welter

Was wissen
wir über
Primzahlen?

Das Sieb des
Eratosthenes

Wieviele
Primzahlen
gibt es?

Weitere Fra-
gestellungen,
die
Primzahlen
beinhalten

Besondere
Primzahlen

Definition

Eine *Primzahl* ist eine natürliche Zahl, die genau zwei Teiler (in den natürlichen Zahlen) hat, nämlich 1 und sich selber.
Natürliche Zahlen ungleich 1, die keine Primzahlen sind, heißen *zusammengesetzt*.

Beispiele

- ▶ 2, 3, 5, 7, 11, 13, ..., $2^{32582657} - 1$, ... sind Primzahlen.

Primzahlen

Dr. Michael
Welter

Was wissen
wir über
Primzahlen?

Das Sieb des
Eratosthenes

Wieviele
Primzahlen
gibt es?

Weitere Fra-
gestellungen,
die
Primzahlen
beinhalten

Besondere
Primzahlen

Definition

Eine *Primzahl* ist eine natürliche Zahl, die genau zwei Teiler (in den natürlichen Zahlen) hat, nämlich 1 und sich selber.
Natürliche Zahlen ungleich 1, die keine Primzahlen sind, heißen *zusammengesetzt*.

Beispiele

- ▶ $2, 3, 5, 7, 11, 13, \dots, 2^{32582657} - 1, \dots$ sind Primzahlen.
- ▶ $4 = 2 \cdot 2, 6 = 2 \cdot 3, 8 = 2^3, 134 = 2 \cdot 67$ sind zusammengesetzt.

Primzahlen

Dr. Michael
Welter

Was wissen
wir über
Primzahlen?

Das Sieb des
Eratosthenes

Wieviele
Primzahlen
gibt es?

Weitere Fra-
gestellungen,
die
Primzahlen
beinhalten

Besondere
Primzahlen

Hauptsatz der elementaren Zahlentheorie

Jede von Eins verschiedene natürliche Zahl läßt sich als Produkt endlich vieler Primzahlen darstellen. Diese Darstellung ist eindeutig, wenn man die Primzahlen der Größe nach ordnet.

Primzahlen

Dr. Michael
Welter

Was wissen
wir über
Primzahlen?

Das Sieb des
Eratosthenes

Wieviele
Primzahlen
gibt es?

Weitere Fra-
gestellungen,
die
Primzahlen
beinhalten

Besondere
Primzahlen

Hauptsatz der elementaren Zahlentheorie

Jede von Eins verschiedene natürliche Zahl läßt sich als Produkt endlich vieler Primzahlen darstellen. Diese Darstellung ist eindeutig, wenn man die Primzahlen der Größe nach ordnet.

Die Primzahlen sind also die Bausteine der natürlichen Zahlen.

Primzahlen

Dr. Michael
Welter

Was wissen
wir über
Primzahlen?

**Das Sieb des
Eratosthenes**

Wieviele
Primzahlen
gibt es?

Weitere Fra-
gestellungen,
die
Primzahlen
beinhalten

Besondere
Primzahlen

Hierbei handelt es sich um folgenden Algorithmus:

- ▶ Schreibe alle natürlichen Zahlen von 2 bis N auf.

Primzahlen

Dr. Michael
Welter

Was wissen
wir über
Primzahlen?

Das Sieb des
Eratosthenes

Wieviele
Primzahlen
gibt es?

Weitere Fra-
gestellungen,
die
Primzahlen
beinhalten

Besondere
Primzahlen

Hierbei handelt es sich um folgenden Algorithmus:

- ▶ Schreibe alle natürlichen Zahlen von 2 bis N auf.
- ▶ Setze die Siebzahl p auf 2.

Primzahlen

Dr. Michael
Welter

Was wissen
wir über
Primzahlen?

Das Sieb des
Eratosthenes

Wieviele
Primzahlen
gibt es?

Weitere Fra-
gestellungen,
die
Primzahlen
beinhalten

Besondere
Primzahlen

Hierbei handelt es sich um folgenden Algorithmus:

- ▶ Schreibe alle natürlichen Zahlen von 2 bis N auf.
- ▶ Setze die Siebzahl p auf 2.
- ▶ Solange $p^2 \leq N$ gilt:
 - ▶ Streiche jede p -te Zahl. (p selber aber nicht.)

Primzahlen

Dr. Michael
Welter

Was wissen
wir über
Primzahlen?

Das Sieb des
Eratosthenes

Wieviele
Primzahlen
gibt es?

Weitere Fra-
gestellungen,
die
Primzahlen
beinhalten

Besondere
Primzahlen

Hierbei handelt es sich um folgenden Algorithmus:

- ▶ Schreibe alle natürlichen Zahlen von 2 bis N auf.
- ▶ Setze die Siebzahl p auf 2.
- ▶ Solange $p^2 \leq N$ gilt:
 - ▶ Streiche jede p -te Zahl. (p selber aber nicht.)
 - ▶ Setze p auf die nächste nicht gestrichene Zahl.

Primzahlen

Dr. Michael
Welter

Was wissen
wir über
Primzahlen?

Das Sieb des
Eratosthenes

Wieviele
Primzahlen
gibt es?

Weitere Fra-
gestellungen,
die
Primzahlen
beinhalten

Besondere
Primzahlen

Hierbei handelt es sich um folgenden Algorithmus:

- ▶ Schreibe alle natürlichen Zahlen von 2 bis N auf.
- ▶ Setze die Siebzahl p auf 2.
- ▶ Solange $p^2 \leq N$ gilt:
 - ▶ Streiche jede p -te Zahl. (p selber aber nicht.)
 - ▶ Setze p auf die nächste nicht gestrichene Zahl.

Hier stellt sich ein Mathematiker die Frage:

Warum ist dieser Algorithmus korrekt?

Primzahlen

Dr. Michael
Welter

Was wissen
wir über
Primzahlen?

Das Sieb des
Eratosthenes

Wieviele
Primzahlen
gibt es?

Weitere Fra-
gestellungen,
die
Primzahlen
beinhalten

Besondere
Primzahlen

Satz (Euklid)

Es gibt unendlich viele Primzahlen.

Primzahlen

Dr. Michael Welter

Was wissen wir über Primzahlen?

Das Sieb des Eratosthenes

Wieviele Primzahlen gibt es?

Weitere Fragestellungen, die Primzahlen beinhalten

Besondere Primzahlen

Satz (Euklid)

Es gibt unendlich viele Primzahlen.

Hier stellt sich ein Mathematiker die Frage:

Wie beweist man diese Aussage?

Primzahlen

Dr. Michael
Welter

Was wissen
wir über
Primzahlen?

Das Sieb des
Eratosthenes

Wieviele
Primzahlen
gibt es?

Weitere Fra-
gestellungen,
die
Primzahlen
beinhalten

Besondere
Primzahlen

- ▶ Wir nehmen an, dass es der Satz nicht wahr ist und wollen aus dieser Annahme einen Widerspruch herleiten. Dieses Vorgehen nennt man *Beweis durch Widerspruch*.

Primzahlen

Dr. Michael
Welter

Was wissen
wir über
Primzahlen?

Das Sieb des
Eratosthenes

Wieviele
Primzahlen
gibt es?

Weitere Fra-
gestellungen,
die
Primzahlen
beinhalten

Besondere
Primzahlen

- ▶ Wir nehmen an, dass es der Satz nicht wahr ist und wollen aus dieser Annahme einen Widerspruch herleiten. Dieses Vorgehen nennt man *Beweis durch Widerspruch*.
- ▶ Mit P sei die größte Primzahl bezeichnet.

Primzahlen

Dr. Michael
Welter

Was wissen
wir über
Primzahlen?

Das Sieb des
Eratosthenes

Wieviele
Primzahlen
gibt es?

Weitere Fra-
gestellungen,
die
Primzahlen
beinhalten

Besondere
Primzahlen

- ▶ Wir nehmen an, dass es der Satz nicht wahr ist und wollen aus dieser Annahme einen Widerspruch herleiten. Dieses Vorgehen nennt man *Beweis durch Widerspruch*.
- ▶ Mit P sei die größte Primzahl bezeichnet.
- ▶ Wir setzen $Q := 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot P + 1$.

Primzahlen

Dr. Michael
Welter

Was wissen
wir über
Primzahlen?

Das Sieb des
Eratosthenes

Wieviele
Primzahlen
gibt es?

Weitere Fra-
gestellungen,
die
Primzahlen
beinhalten

Besondere
Primzahlen

- ▶ Wir nehmen an, dass es der Satz nicht wahr ist und wollen aus dieser Annahme einen Widerspruch herleiten. Dieses Vorgehen nennt man *Beweis durch Widerspruch*.
- ▶ Mit P sei die größte Primzahl bezeichnet.
- ▶ Wir setzen $Q := 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot P + 1$.
- ▶ Nach dem Hauptsatz der elementaren Zahlentheorie lässt sich Q als Produkt von Primzahlen schreiben.

Primzahlen

Dr. Michael
Welter

Was wissen
wir über
Primzahlen?

Das Sieb des
Eratosthenes

Wieviele
Primzahlen
gibt es?

Weitere Fra-
gestellungen,
die
Primzahlen
beinhalten

Besondere
Primzahlen

- ▶ Wir nehmen an, dass es der Satz nicht wahr ist und wollen aus dieser Annahme einen Widerspruch herleiten. Dieses Vorgehen nennt man *Beweis durch Widerspruch*.
- ▶ Mit P sei die größte Primzahl bezeichnet.
- ▶ Wir setzen $Q := 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot P + 1$.
- ▶ Nach dem Hauptsatz der elementaren Zahlentheorie lässt sich Q als Produkt von Primzahlen schreiben.
- ▶ Würde aber eine Primzahl $p \in \{2, 3, 5, \dots, P\}$ die Zahl Q teilen, so würde p auch 1 teilen, was nicht möglich ist.

Primzahlen

Dr. Michael
Welter

Was wissen
wir über
Primzahlen?

Das Sieb des
Eratosthenes

Wieviele
Primzahlen
gibt es?

Weitere Fra-
gestellungen,
die
Primzahlen
beinhalten

Besondere
Primzahlen

Satz (Euklid)

Es gibt unendlich viele Primzahlen.

Primzahlen

Dr. Michael
Welter

Was wissen
wir über
Primzahlen?

Das Sieb des
Eratosthenes

Wieviele
Primzahlen
gibt es?

Weitere Fra-
gestellungen,
die
Primzahlen
beinhalten

Besondere
Primzahlen

Satz (Euklid)

Es gibt unendlich viele Primzahlen.

Außerdem würde ein Mathematiker gerne wissen:

Kann man „*unendlich*“ genauer quantifizieren?

Die Primzahlanzahlfunktion $\pi(x)$

Primzahlen

Dr. Michael
Welter

Was wissen
wir über
Primzahlen?

Das Sieb des
Eratosthenes

Wieviele
Primzahlen
gibt es?

Weitere Fra-
gestellungen,
die
Primzahlen
beinhalten

Besondere
Primzahlen

Wir bezeichnen mit $\pi(x)$ die Anzahl der Primzahlen, die kleiner oder gleich x sind.

Die Primzahlanzahlfunktion $\pi(x)$

Primzahlen

Dr. Michael
Welter

Was wissen
wir über
Primzahlen?

Das Sieb des
Eratosthenes

Wieviele
Primzahlen
gibt es?

Weitere Fra-
gestellungen,
die
Primzahlen
beinhalten

Besondere
Primzahlen

Wir bezeichnen mit $\pi(x)$ die Anzahl der Primzahlen, die kleiner oder gleich x sind.

Mittels des Siebs des Eratosthenes bestätigt man schnell:

▶ $\pi(10) = 4$

Die Primzahlanzahlfunktion $\pi(x)$

Primzahlen

Dr. Michael
Welter

Was wissen
wir über
Primzahlen?

Das Sieb des
Eratosthenes

Wieviele
Primzahlen
gibt es?

Weitere Fra-
gestellungen,
die
Primzahlen
beinhalten

Besondere
Primzahlen

Wir bezeichnen mit $\pi(x)$ die Anzahl der Primzahlen, die kleiner oder gleich x sind.

Mittels des Siebs des Eratosthenes bestätigt man schnell:

▶ $\pi(10) = 4$

▶ $\pi(20) = 8$

Die Primzahlanzahlfunktion $\pi(x)$

Primzahlen

Dr. Michael
Welter

Was wissen
wir über
Primzahlen?

Das Sieb des
Eratosthenes

Wieviele
Primzahlen
gibt es?

Weitere Fra-
gestellungen,
die
Primzahlen
beinhalten

Besondere
Primzahlen

Wir bezeichnen mit $\pi(x)$ die Anzahl der Primzahlen, die kleiner oder gleich x sind.

Mittels des Siebs des Eratosthenes bestätigt man schnell:

- ▶ $\pi(10) = 4$
- ▶ $\pi(20) = 8$
- ▶ $\pi(50) = 15$

Die Primzahlanzahlfunktion $\pi(x)$

Primzahlen

Dr. Michael
Welter

Was wissen
wir über
Primzahlen?

Das Sieb des
Eratosthenes

Wieviele
Primzahlen
gibt es?

Weitere Fra-
gestellungen,
die
Primzahlen
beinhalten

Besondere
Primzahlen

Wir bezeichnen mit $\pi(x)$ die Anzahl der Primzahlen, die kleiner oder gleich x sind.

Mittels des Siebs des Eratosthenes bestätigt man schnell:

- ▶ $\pi(10) = 4$
- ▶ $\pi(20) = 8$
- ▶ $\pi(50) = 15$
- ▶ $\pi(100) = 25$

Die Primzahlanzahlfunktion $\pi(x)$

Primzahlen

Dr. Michael
Welter

Was wissen
wir über
Primzahlen?

Das Sieb des
Eratosthenes

Wieviele
Primzahlen
gibt es?

Weitere Fra-
gestellungen,
die
Primzahlen
beinhalten

Besondere
Primzahlen

Wir bezeichnen mit $\pi(x)$ die Anzahl der Primzahlen, die kleiner oder gleich x sind.

Mittels des Siebs des Eratosthenes bestätigt man schnell:

- ▶ $\pi(10) = 4$
- ▶ $\pi(20) = 8$
- ▶ $\pi(50) = 15$
- ▶ $\pi(100) = 25$
- ▶ $\pi(250) = 53$

Die Primzahlanzahlfunktion $\pi(x)$

Primzahlen

Dr. Michael
Welter

Was wissen
wir über
Primzahlen?

Das Sieb des
Eratosthenes

Wieviele
Primzahlen
gibt es?

Weitere Fra-
gestellungen,
die
Primzahlen
beinhalten

Besondere
Primzahlen

Wir bezeichnen mit $\pi(x)$ die Anzahl der Primzahlen, die kleiner oder gleich x sind.

Mittels des Siebs des Eratosthenes bestätigt man schnell:

- ▶ $\pi(10) = 4$
- ▶ $\pi(20) = 8$
- ▶ $\pi(50) = 15$
- ▶ $\pi(100) = 25$
- ▶ $\pi(250) = 53$
- ▶ $\pi(1000) = 168$

Graph von $\pi(x)$

Primzahlen

Dr. Michael Welter

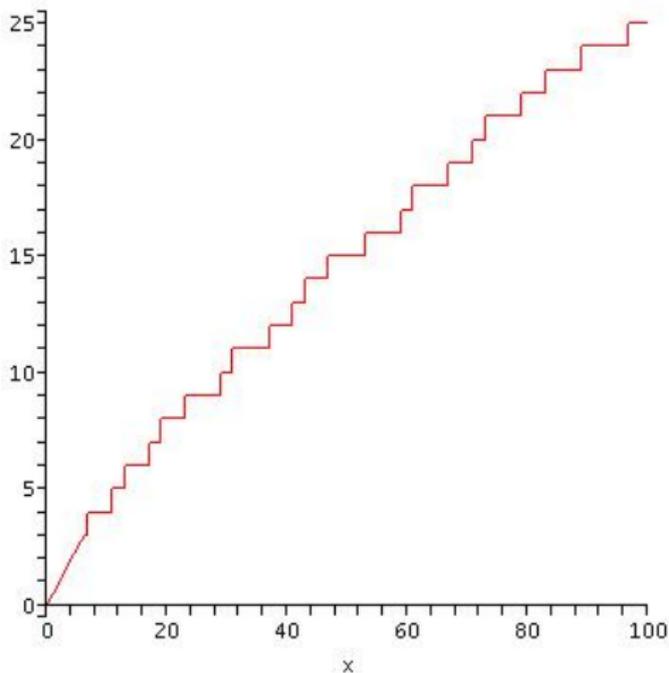
Was wissen wir über Primzahlen?

Das Sieb des Eratosthenes

Wieviele Primzahlen gibt es?

Weitere Fragestellungen, die Primzahlen beinhalten

Besondere Primzahlen



Graph von $\pi(x)$

Primzahlen

Dr. Michael Welter

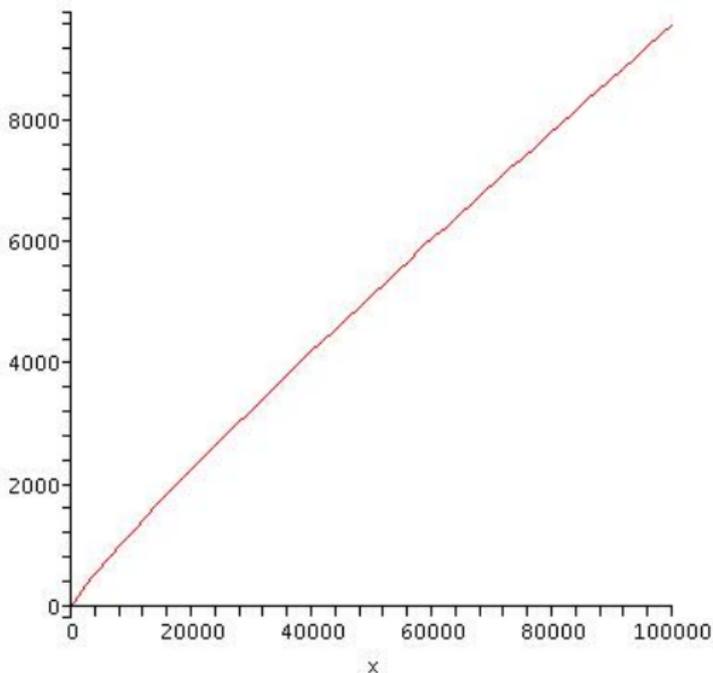
Was wissen wir über Primzahlen?

Das Sieb des Eratosthenes

Wieviele Primzahlen gibt es?

Weitere Fragestellungen, die Primzahlen beinhalten

Besondere Primzahlen



Primzahlen

Dr. Michael
Welter

Was wissen
wir über
Primzahlen?

Das Sieb des
Eratosthenes

Wieviele
Primzahlen
gibt es?

Weitere Fra-
gestellungen,
die
Primzahlen
beinhalten

Besondere
Primzahlen

Wir wollen nun überlegen, welche Größenordnung $\pi(N)$ für große N hat.

Primzahlen

Dr. Michael
Welter

Was wissen
wir über
Primzahlen?

Das Sieb des
Eratosthenes

Wieviele
Primzahlen
gibt es?

Weitere Fra-
gestellungen,
die
Primzahlen
beinhalten

Besondere
Primzahlen

Wir wollen nun überlegen, welche Größenordnung $\pi(N)$ für große N hat. Bezeichnen wir mit A die Menge aller Zahlen n mit $2 \leq n \leq N$, die wir streichen, so gilt:

Primzahlen

Dr. Michael
WelterWas wissen
wir über
Primzahlen?Das Sieb des
EratosthenesWieviele
Primzahlen
gibt es?Weitere Fra-
gestellungen,
die
Primzahlen
beinhaltenBesondere
Primzahlen

Wir wollen nun überlegen, welche Größenordnung $\pi(N)$ für große N hat. Bezeichnen wir mit A die Menge aller Zahlen n mit $2 \leq n \leq N$, die wir streichen, so gilt:

$$\pi(N) = N - 1 - |A|.$$

Primzahlen

Dr. Michael
Welter

Was wissen
wir über
Primzahlen?

Das Sieb des
Eratosthenes

Wieviele
Primzahlen
gibt es?

Weitere Fra-
gestellungen,
die
Primzahlen
beinhalten

Besondere
Primzahlen

Wir wollen nun überlegen, welche Größenordnung $\pi(N)$ für große N hat. Bezeichnen wir mit A die Menge aller Zahlen n mit $2 \leq n \leq N$, die wir streichen, so gilt:

$$\pi(N) = N - 1 - |A|.$$

Frage:

Wieviele Zahlen $2 \leq n \leq N$ haben wir durchgestrichen?

Primzahlen

Dr. Michael
Welter

Was wissen
wir über
Primzahlen?

Das Sieb des
Eratosthenes

Wieviele
Primzahlen
gibt es?

Weitere Fra-
gestellungen,
die
Primzahlen
beinhalten

Besondere
Primzahlen

Seien $p_1 = 2, p_2 = 3, \dots, p_{r-1}, p_r$ die Primzahlen $\leq \sqrt{N}$.

Das Sieb des Eratosthenes - revisited

Primzahlen

Dr. Michael
Welter

Was wissen
wir über
Primzahlen?

Das Sieb des
Eratosthenes

Wieviele
Primzahlen
gibt es?

Weitere Fra-
gestellungen,
die
Primzahlen
beinhalten

Besondere
Primzahlen

Seien $p_1 = 2, p_2 = 3, \dots, p_{r-1}, p_r$ die Primzahlen $\leq \sqrt{N}$. Es ist

$$|A| = \left[\frac{N}{2} \right] + \left[\frac{N}{3} \right] + \dots + \left[\frac{N}{p_r} \right]$$

Das Sieb des Eratosthenes - revisited

Primzahlen

Dr. Michael
Welter

Was wissen
wir über
Primzahlen?

Das Sieb des
Eratosthenes

Wieviele
Primzahlen
gibt es?

Weitere Fra-
gestellungen,
die
Primzahlen
beinhalten

Besondere
Primzahlen

Seien $p_1 = 2, p_2 = 3, \dots, p_{r-1}, p_r$ die Primzahlen $\leq \sqrt{N}$. Es ist

$$|A| = \left[\frac{N}{2} \right] + \left[\frac{N}{3} \right] + \dots + \left[\frac{N}{p_r} \right] - \pi(\sqrt{N})$$

Das Sieb des Eratosthenes - revisited

Primzahlen

Dr. Michael
Welter

Was wissen
wir über
Primzahlen?

Das Sieb des
Eratosthenes

Wieviele
Primzahlen
gibt es?

Weitere Fra-
gestellungen,
die
Primzahlen
beinhalten

Besondere
Primzahlen

Seien $p_1 = 2, p_2 = 3, \dots, p_{r-1}, p_r$ die Primzahlen $\leq \sqrt{N}$. Es ist

$$|A| = \left[\frac{N}{2} \right] + \left[\frac{N}{3} \right] + \dots + \left[\frac{N}{p_r} \right] - \pi(\sqrt{N}) \\ - \left[\frac{N}{2 \cdot 3} \right] - \left[\frac{N}{2 \cdot 5} \right] - \dots - \left[\frac{N}{p_{r-1} p_r} \right]$$

Das Sieb des Eratosthenes - revisited

Primzahlen

Dr. Michael Welter

Was wissen wir über Primzahlen?

Das Sieb des Eratosthenes

Wieviele Primzahlen gibt es?

Weitere Fragestellungen, die Primzahlen beinhalten

Besondere Primzahlen

Seien $p_1 = 2, p_2 = 3, \dots, p_{r-1}, p_r$ die Primzahlen $\leq \sqrt{N}$. Es ist

$$\begin{aligned}
 |A| &= \left[\frac{N}{2} \right] + \left[\frac{N}{3} \right] + \dots + \left[\frac{N}{p_r} \right] - \pi(\sqrt{N}) \\
 &\quad - \left[\frac{N}{2 \cdot 3} \right] - \left[\frac{N}{2 \cdot 5} \right] - \dots - \left[\frac{N}{p_{r-1} p_r} \right] \\
 &\quad + \left[\frac{N}{2 \cdot 3 \cdot 5} \right] + \left[\frac{N}{2 \cdot 3 \cdot 7} \right] + \dots + \left[\frac{N}{p_{r-2} p_{r-1} p_r} \right]
 \end{aligned}$$

Das Sieb des Eratosthenes - revisited

Primzahlen

Dr. Michael Welter

Was wissen wir über Primzahlen?

Das Sieb des Eratosthenes

Wieviele Primzahlen gibt es?

Weitere Fragestellungen, die Primzahlen beinhalten

Besondere Primzahlen

Seien $p_1 = 2, p_2 = 3, \dots, p_{r-1}, p_r$ die Primzahlen $\leq \sqrt{N}$. Es ist

$$\begin{aligned}
 |A| = & \left[\frac{N}{2} \right] + \left[\frac{N}{3} \right] + \dots + \left[\frac{N}{p_r} \right] - \pi(\sqrt{N}) \\
 & - \left[\frac{N}{2 \cdot 3} \right] - \left[\frac{N}{2 \cdot 5} \right] - \dots - \left[\frac{N}{p_{r-1} p_r} \right] \\
 & + \left[\frac{N}{2 \cdot 3 \cdot 5} \right] + \left[\frac{N}{2 \cdot 3 \cdot 7} \right] + \dots + \left[\frac{N}{p_{r-2} p_{r-1} p_r} \right] \\
 & - \dots + \dots - \dots
 \end{aligned}$$

Primzahlen

Dr. Michael Welter

Was wissen wir über Primzahlen?

Das Sieb des Eratosthenes

Wieviele Primzahlen gibt es?

Weitere Fragestellungen, die Primzahlen beinhalten

Besondere Primzahlen

Seien $p_1 = 2, p_2 = 3, \dots, p_{r-1}, p_r$ die Primzahlen $\leq \sqrt{N}$. Es ist

$$\begin{aligned}
 |A| = & \left[\frac{N}{2} \right] + \left[\frac{N}{3} \right] + \dots + \left[\frac{N}{p_r} \right] - \pi(\sqrt{N}) \\
 & - \left[\frac{N}{2 \cdot 3} \right] - \left[\frac{N}{2 \cdot 5} \right] - \dots - \left[\frac{N}{p_{r-1} p_r} \right] \\
 & + \left[\frac{N}{2 \cdot 3 \cdot 5} \right] + \left[\frac{N}{2 \cdot 3 \cdot 7} \right] + \dots + \left[\frac{N}{p_{r-2} p_{r-1} p_r} \right] \\
 & - \dots + \dots - \dots \\
 & + (-1)^{r-1} \left[\frac{N}{p_1 \cdot \dots \cdot p_{r-1} p_r} \right]
 \end{aligned}$$

Das Sieb des Eratosthenes - revisited

Primzahlen

Dr. Michael
Welter

Was wissen
wir über
Primzahlen?

Das Sieb des
Eratosthenes

Wieviele
Primzahlen
gibt es?

Weitere Fra-
gestellungen,
die
Primzahlen
beinhalten

Besondere
Primzahlen

Ist also $P := 2 \cdot \dots \cdot p_r$ so erhalten wir

$$|A| = -\pi(\sqrt{N}) + \sum_{\substack{d \text{ teilt } P \\ d > 1}} (-1)^{\omega(d)-1} \left\lfloor \frac{N}{d} \right\rfloor,$$

wobei $\omega(d)$ die Anzahl der verschiedenen Primteiler von d bezeichnet und die Summe sich über alle Teiler von P erstreckt, die größer als 1 sind.

Primzahlen

Dr. Michael
Welter

Was wissen
wir über
Primzahlen?

Das Sieb des
Eratosthenes

Wieviele
Primzahlen
gibt es?

Weitere Fra-
gestellungen,
die
Primzahlen
beinhalten

Besondere
Primzahlen

Ist also $P := 2 \cdot \dots \cdot p_r$ so erhalten wir

$$|A| = -\pi(\sqrt{N}) + \sum_{\substack{d \text{ teilt } P \\ d > 1}} (-1)^{\omega(d)-1} \left[\frac{N}{d} \right],$$

wobei $\omega(d)$ die Anzahl der verschiedenen Primteiler von d bezeichnet und die Summe sich über alle Teiler von P erstreckt, die größer als 1 sind.

Für $\pi(N)$ ergibt sich also

$$\begin{aligned} \pi(N) &= N - 1 - |A| \\ &= \pi(\sqrt{N}) - 1 + \sum_{d \text{ teilt } P} (-1)^{\omega(d)} \left[\frac{N}{d} \right]. \end{aligned}$$

Primzahlen

Dr. Michael
Welter

Was wissen
wir über
Primzahlen?

Das Sieb des
Eratosthenes

Wieviele
Primzahlen
gibt es?

Weitere Fra-
gestellungen,
die
Primzahlen
beinhalten

Besondere
Primzahlen

$$\pi(100) = \pi(10) - 1$$

Das Sieb des Eratosthenes - ein Beispiel

Primzahlen

Dr. Michael
Welter

Was wissen
wir über
Primzahlen?

Das Sieb des
Eratosthenes

Wieviele
Primzahlen
gibt es?

Weitere Fra-
gestellungen,
die
Primzahlen
beinhalten

Besondere
Primzahlen

$$\pi(100) = \pi(10) - 1 + \left[\frac{100}{1} \right]$$

Das Sieb des Eratosthenes - ein Beispiel

Primzahlen

Dr. Michael Welter

Was wissen wir über Primzahlen?

Das Sieb des Eratosthenes

Wieviele Primzahlen gibt es?

Weitere Fragestellungen, die Primzahlen beinhalten

Besondere Primzahlen

$$\begin{aligned} \pi(100) &= \pi(10) - 1 + \left[\frac{100}{1} \right] - \left[\frac{100}{2} \right] - \left[\frac{100}{3} \right] \\ &\quad - \left[\frac{100}{5} \right] - \left[\frac{100}{7} \right] \end{aligned}$$

Das Sieb des Eratosthenes - ein Beispiel

Primzahlen

Dr. Michael
Welter

Was wissen
wir über
Primzahlen?

Das Sieb des
Eratosthenes

Wieviele
Primzahlen
gibt es?

Weitere Fra-
gestellungen,
die
Primzahlen
beinhalten

Besondere
Primzahlen

$$\begin{aligned}
 \pi(100) &= \pi(10) - 1 + \left[\frac{100}{1} \right] - \left[\frac{100}{2} \right] - \left[\frac{100}{3} \right] \\
 &\quad - \left[\frac{100}{5} \right] - \left[\frac{100}{7} \right] + \left[\frac{100}{6} \right] + \left[\frac{100}{10} \right] \\
 &\quad + \left[\frac{100}{14} \right] + \left[\frac{100}{15} \right] + \left[\frac{100}{21} \right] + \left[\frac{100}{35} \right]
 \end{aligned}$$

Das Sieb des Eratosthenes - ein Beispiel

Primzahlen

Dr. Michael Welter

Was wissen wir über Primzahlen?

Das Sieb des Eratosthenes

Wieviele Primzahlen gibt es?

Weitere Fragestellungen, die Primzahlen beinhalten

Besondere Primzahlen

$$\begin{aligned}
 \pi(100) &= \pi(10) - 1 + \left[\frac{100}{1} \right] - \left[\frac{100}{2} \right] - \left[\frac{100}{3} \right] \\
 &\quad - \left[\frac{100}{5} \right] - \left[\frac{100}{7} \right] + \left[\frac{100}{6} \right] + \left[\frac{100}{10} \right] \\
 &\quad + \left[\frac{100}{14} \right] + \left[\frac{100}{15} \right] + \left[\frac{100}{21} \right] + \left[\frac{100}{35} \right] - \left[\frac{100}{30} \right] \\
 &\quad - \left[\frac{100}{42} \right] - \left[\frac{100}{70} \right] - \left[\frac{100}{105} \right]
 \end{aligned}$$

Das Sieb des Eratosthenes - ein Beispiel

Primzahlen

Dr. Michael Welter

Was wissen wir über Primzahlen?

Das Sieb des Eratosthenes

Wieviele Primzahlen gibt es?

Weitere Fragestellungen, die Primzahlen beinhalten

Besondere Primzahlen

$$\begin{aligned}
 \pi(100) &= \pi(10) - 1 + \left[\frac{100}{1} \right] - \left[\frac{100}{2} \right] - \left[\frac{100}{3} \right] \\
 &\quad - \left[\frac{100}{5} \right] - \left[\frac{100}{7} \right] + \left[\frac{100}{6} \right] + \left[\frac{100}{10} \right] \\
 &\quad + \left[\frac{100}{14} \right] + \left[\frac{100}{15} \right] + \left[\frac{100}{21} \right] + \left[\frac{100}{35} \right] - \left[\frac{100}{30} \right] \\
 &\quad - \left[\frac{100}{42} \right] - \left[\frac{100}{70} \right] - \left[\frac{100}{105} \right] + \left[\frac{100}{210} \right]
 \end{aligned}$$

Primzahlen

Dr. Michael Welter

Was wissen wir über Primzahlen?

Das Sieb des Eratosthenes

Wieviele Primzahlen gibt es?

Weitere Fragestellungen, die Primzahlen beinhalten

Besondere Primzahlen

$$\begin{aligned}
 \pi(100) &= \pi(10) - 1 + \left[\frac{100}{1} \right] - \left[\frac{100}{2} \right] - \left[\frac{100}{3} \right] \\
 &\quad - \left[\frac{100}{5} \right] - \left[\frac{100}{7} \right] + \left[\frac{100}{6} \right] + \left[\frac{100}{10} \right] \\
 &\quad + \left[\frac{100}{14} \right] + \left[\frac{100}{15} \right] + \left[\frac{100}{21} \right] + \left[\frac{100}{35} \right] - \left[\frac{100}{30} \right] \\
 &\quad - \left[\frac{100}{42} \right] - \left[\frac{100}{70} \right] - \left[\frac{100}{105} \right] + \left[\frac{100}{210} \right] \\
 &= 4 - 1 - 100 - 50 - 33 - 20 - 14 \\
 &\quad + 16 + 10 + 7 + 6 + 4 + 2 \\
 &\quad - 3 - 2 - 1 - 0 + 0
 \end{aligned}$$

Das Sieb des Eratosthenes - ein Beispiel

Primzahlen

Dr. Michael Welter

Was wissen wir über Primzahlen?

Das Sieb des Eratosthenes

Wieviele Primzahlen gibt es?

Weitere Fragestellungen, die Primzahlen beinhalten

Besondere Primzahlen

$$\begin{aligned}
 \pi(100) &= \pi(10) - 1 + \left[\frac{100}{1} \right] - \left[\frac{100}{2} \right] - \left[\frac{100}{3} \right] \\
 &\quad - \left[\frac{100}{5} \right] - \left[\frac{100}{7} \right] + \left[\frac{100}{6} \right] + \left[\frac{100}{10} \right] \\
 &\quad + \left[\frac{100}{14} \right] + \left[\frac{100}{15} \right] + \left[\frac{100}{21} \right] + \left[\frac{100}{35} \right] - \left[\frac{100}{30} \right] \\
 &\quad - \left[\frac{100}{42} \right] - \left[\frac{100}{70} \right] - \left[\frac{100}{105} \right] + \left[\frac{100}{210} \right] \\
 &= 4 - 1 - 100 - 50 - 33 - 20 - 14 \\
 &\quad + 16 + 10 + 7 + 6 + 4 + 2 \\
 &\quad - 3 - 2 - 1 - 0 + 0 = 25
 \end{aligned}$$

Primzahlen

Dr. Michael
Welter

Was wissen
wir über
Primzahlen?

Das Sieb des
Eratosthenes

Wieviele
Primzahlen
gibt es?

Weitere Fra-
gestellungen,
die
Primzahlen
beinhalten

Besondere
Primzahlen

Wir haben also

$$\pi(N) = \pi(\sqrt{N}) - 1 + \sum_{d \text{ teilt } P} (-1)^{\omega(d)} \left[\frac{N}{d} \right].$$

Primzahlen

Dr. Michael
Welter

Was wissen
wir über
Primzahlen?

Das Sieb des
Eratosthenes

Wieviele
Primzahlen
gibt es?

Weitere Fra-
gestellungen,
die
Primzahlen
beinhalten

Besondere
Primzahlen

Wir haben also

$$\pi(N) = \pi(\sqrt{N}) - 1 + \sum_{d \text{ teilt } P} (-1)^{\omega(d)} \left[\frac{N}{d} \right].$$

Für große N kann man $\pi(\sqrt{N}) - 1$ gegenüber $\pi(N)$ vernachlässigen. Also

$$\pi(N) \approx \sum_{d \text{ teilt } P} (-1)^{\omega(d)} \left[\frac{N}{d} \right].$$

Primzahlen

Dr. Michael
Welter

Was wissen
wir über
Primzahlen?

Das Sieb des
Eratosthenes

Wieviele
Primzahlen
gibt es?

Weitere Fra-
gestellungen,
die
Primzahlen
beinhalten

Besondere
Primzahlen

Wenn wir dies durch N teilen, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{\pi(N)}{N} &\approx \sum_{d \text{ teilt } P} (-1)^{\omega(d)} \frac{1}{d} \\ &= 1 - \sum_{1 \leq i \leq r} \frac{1}{p_i} + \sum_{1 \leq i < j \leq r} \frac{1}{p_i p_j} \\ &\quad - \dots + \dots + (-1)^r \frac{1}{p_1 \cdot \dots \cdot p_r} \end{aligned}$$

Primzahlen

Dr. Michael Welter

Was wissen wir über Primzahlen?

Das Sieb des Eratosthenes

Wieviele Primzahlen gibt es?

Weitere Fragestellungen, die Primzahlen beinhalten

Besondere Primzahlen

Wenn wir dies durch N teilen, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
 \frac{\pi(N)}{N} &\approx \sum_{d \text{ teilt } P} (-1)^{\omega(d)} \frac{1}{d} \\
 &= 1 - \sum_{1 \leq i \leq r} \frac{1}{p_i} + \sum_{1 \leq i < j \leq r} \frac{1}{p_i p_j} \\
 &\quad - \dots + \dots + (-1)^r \frac{1}{p_1 \cdot \dots \cdot p_r} \\
 &= \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{p_r}\right)
 \end{aligned}$$

Primzahlen

Dr. Michael Welter

Was wissen wir über Primzahlen?

Das Sieb des Eratosthenes

Wieviele Primzahlen gibt es?

Weitere Fragestellungen, die Primzahlen beinhalten

Besondere Primzahlen

Wenn wir dies durch N teilen, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
 \frac{\pi(N)}{N} &\approx \sum_{d \text{ teilt } P} (-1)^{\omega(d)} \frac{1}{d} \\
 &= 1 - \sum_{1 \leq i \leq r} \frac{1}{p_i} + \sum_{1 \leq i < j \leq r} \frac{1}{p_i p_j} \\
 &\quad - \dots + \dots + (-1)^r \frac{1}{p_1 \cdot \dots \cdot p_r} \\
 &= \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{p_r}\right) \\
 &\approx \frac{C}{\log N}.
 \end{aligned}$$

Das Sieb des Eratosthenes - revisited

Primzahlen

Dr. Michael
Welter

Was wissen
wir über
Primzahlen?

Das Sieb des
Eratosthenes

Wieviele
Primzahlen
gibt es?

Weitere Fra-
gestellungen,
die
Primzahlen
beinhalten

Besondere
Primzahlen

Bei der letzten Approximation wird einerseits ausgenutzt, dass für $0 < q < 1$

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k =$$

Das Sieb des Eratosthenes - revisited

Primzahlen

Dr. Michael
Welter

Was wissen
wir über
Primzahlen?

Das Sieb des
Eratosthenes

Wieviele
Primzahlen
gibt es?

Weitere Fra-
gestellungen,
die
Primzahlen
beinhalten

Besondere
Primzahlen

Bei der letzten Approximation wird einerseits ausgenutzt, dass für $0 < q < 1$

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^N q^k$$

Das Sieb des Eratosthenes - revisited

Primzahlen

Dr. Michael
Welter

Was wissen
wir über
Primzahlen?

Das Sieb des
Eratosthenes

Wieviele
Primzahlen
gibt es?

Weitere Fra-
gestellungen,
die
Primzahlen
beinhalten

Besondere
Primzahlen

Bei der letzten Approximation wird einerseits ausgenutzt, dass für $0 < q < 1$

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^N q^k = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q}$$

Das Sieb des Eratosthenes - revisited

Primzahlen

Dr. Michael
Welter

Was wissen
wir über
Primzahlen?

Das Sieb des
Eratosthenes

Wieviele
Primzahlen
gibt es?

Weitere Fra-
gestellungen,
die
Primzahlen
beinhalten

Besondere
Primzahlen

Bei der letzten Approximation wird einerseits ausgenutzt, dass für $0 < q < 1$

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^N q^k = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q} = \frac{1}{1 - q}$$

ist;

Das Sieb des Eratosthenes - revisited

Primzahlen

Dr. Michael
Welter

Was wissen
wir über
Primzahlen?

Das Sieb des
Eratosthenes

Wieviele
Primzahlen
gibt es?

Weitere Fra-
gestellungen,
die
Primzahlen
beinhalten

Besondere
Primzahlen

Bei der letzten Approximation wird einerseits ausgenutzt, dass für $0 < q < 1$

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^N q^k = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q} = \frac{1}{1 - q}$$

ist; also

$$1 - \frac{1}{p} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p^k} \right)^{-1}$$

ist.

Das Sieb des Eratosthenes - revisited

Primzahlen

Dr. Michael Welter

Was wissen wir über Primzahlen?

Das Sieb des Eratosthenes

Wieviele Primzahlen gibt es?

Weitere Fragestellungen, die Primzahlen beinhalten

Besondere Primzahlen

Bei der letzten Approximation wird einerseits ausgenutzt, dass für $0 < q < 1$

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^N q^k = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q} = \frac{1}{1 - q}$$

ist; also

$$1 - \frac{1}{p} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p^k} \right)^{-1}$$

ist. Andererseits benutzt man die Näherung

$$\sum_{1 \leq n \leq N} \frac{1}{n} \approx \log N.$$

Graph von $1/x$

Primzahlen

Dr. Michael Welter

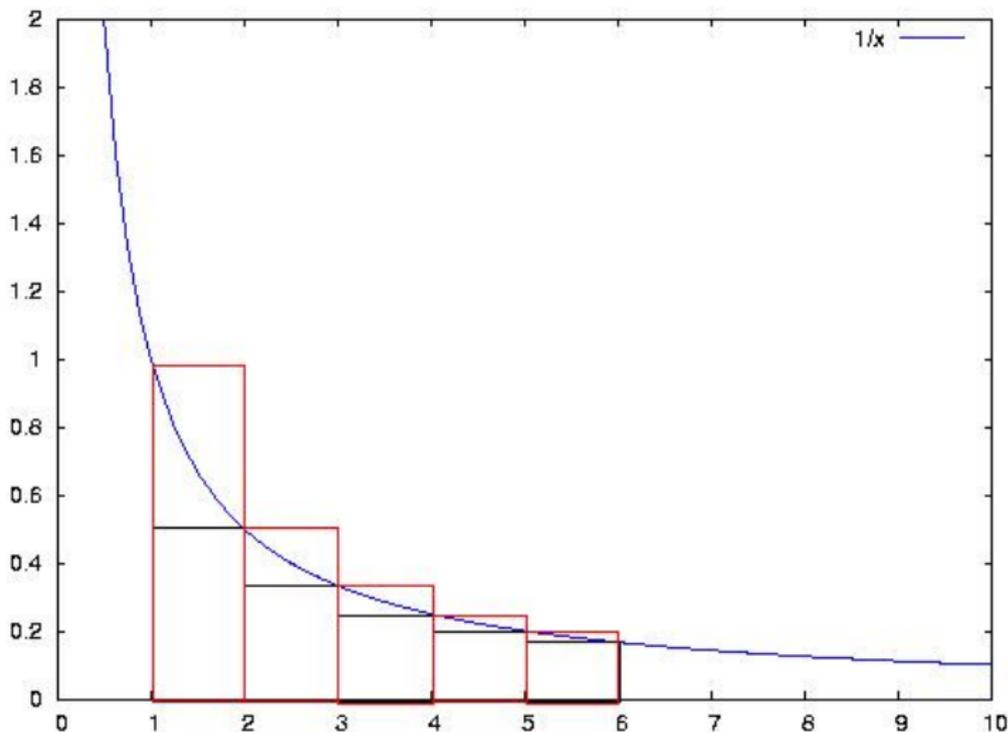
Was wissen wir über Primzahlen?

Das Sieb des Eratosthenes

Wieviele Primzahlen gibt es?

Weitere Fragestellungen, die Primzahlen beinhalten

Besondere Primzahlen



Primzahlen

Dr. Michael
Welter

Was wissen
wir über
Primzahlen?

Das Sieb des
Eratosthenes

Wieviele
Primzahlen
gibt es?

Weitere Fra-
gestellungen,
die
Primzahlen
beinhalten

Besondere
Primzahlen

Unsere Überlegungen legen nahe zu vermuten, dass es positive Konstanten C_1, C_2 gibt, so dass für alle natürlichen Zahlen N

$$C_1 \frac{N}{\log N} \leq \pi(N) \leq C_2 \frac{N}{\log N}$$

gilt.

Primzahlen

Dr. Michael
Welter

Was wissen
wir über
Primzahlen?

Das Sieb des
Eratosthenes

Wieviele
Primzahlen
gibt es?

Weitere Fra-
gestellungen,
die
Primzahlen
beinhalten

Besondere
Primzahlen

Unsere Überlegungen legen nahe zu vermuten, dass es positive Konstanten C_1, C_2 gibt, so dass für alle natürlichen Zahlen N

$$C_1 \frac{N}{\log N} \leq \pi(N) \leq C_2 \frac{N}{\log N}$$

gilt. In der Tat konnte der russische Mathematiker **TSCHEBYSCHEFF** dies um 1850 zeigen. Er zeigte weiter, dass sollte der Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\log x}}$$

existieren, so ist dieser gleich 1.

Graph von $\pi(x)$ und von $\frac{x}{\log x}$

Primzahlen

Dr. Michael Welter

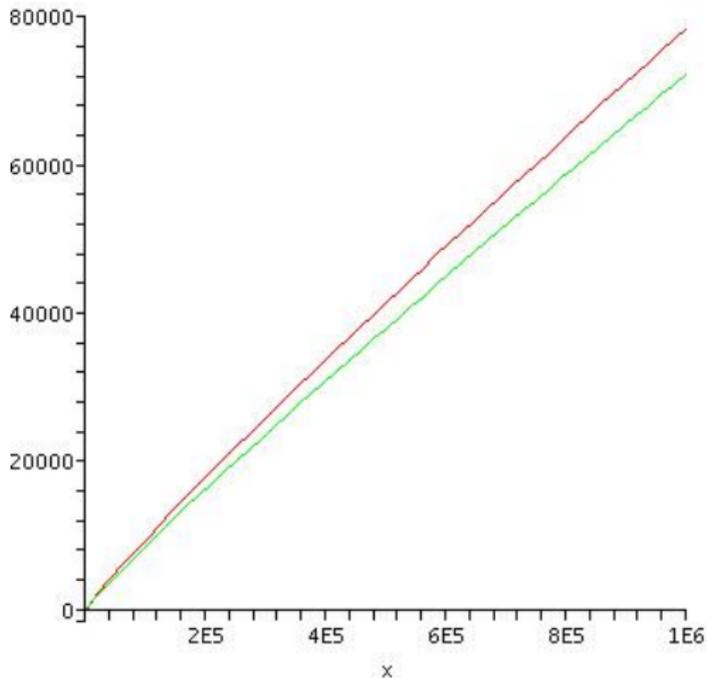
Was wissen wir über Primzahlen?

Das Sieb des Eratosthenes

Wieviele Primzahlen gibt es?

Weitere Fragestellungen, die Primzahlen beinhalten

Besondere Primzahlen



Primzahlen

Dr. Michael
Welter

Was wissen
wir über
Primzahlen?

Das Sieb des
Eratosthenes

Wieviele
Primzahlen
gibt es?

Weitere Fra-
gestellungen,
die
Primzahlen
beinhalten

Besondere
Primzahlen

Bereits Ende des 18. Jahrhunderts vermuteten **LEGENDRE** und **GAUSS** nach intensivem Studium von Primzahltafeln, dass folgendes Resultat gilt:

Der Primzahlsatz

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\log x}} = 1.$$

Primzahlen

Dr. Michael Welter

Was wissen wir über Primzahlen?

Das Sieb des Eratosthenes

Wieviele Primzahlen gibt es?

Weitere Fragestellungen, die Primzahlen beinhalten

Besondere Primzahlen

Bereits Ende des 18. Jahrhunderts vermuteten **LEGENDRE** und **GAUSS** nach intensivem Studium von Primzahltafeln, dass folgendes Resultat gilt:

Der Primzahlsatz

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\log x}} = 1.$$

Dies zeigten 1896 unabhängig voneinander die französischen Mathematiker **DE LA VALLÉE POUSSIN** und **HADAMARD**.

Was ist der größte mögliche Abstand zwischen zwei aufeinanderfolgenden Primzahlen?

Primzahlen

Dr. Michael
Welter

Was wissen
wir über
Primzahlen?

Das Sieb des
Eratosthenes

Wieviele
Primzahlen
gibt es?

Weitere Fra-
gestellungen,
die
Primzahlen
beinhalten

Besondere
Primzahlen

Es sei n eine natürliche Zahl. Wir betrachten die $n - 1$ aufeinanderfolgenden Zahlen

$$n! + 2, n! + 3, n! + 4, \dots, n! + n,$$

wobei $n! = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot n$.

Was ist der größte mögliche Abstand zwischen zwei aufeinanderfolgenden Primzahlen?

Es sei n eine natürliche Zahl. Wir betrachten die $n - 1$ aufeinanderfolgenden Zahlen

$$n! + 2, n! + 3, n! + 4, \dots, n! + n,$$

wobei $n! = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot n$.

Welche dieser Zahlen ist zusammengesetzt?

Was ist der größte mögliche Abstand zwischen zwei aufeinanderfolgenden Primzahlen?

Primzahlen

Dr. Michael Welter

Was wissen wir über Primzahlen?

Das Sieb des Eratosthenes

Wieviele Primzahlen gibt es?

Weitere Fragestellungen, die Primzahlen beinhalten

Besondere Primzahlen

Es sei n eine natürliche Zahl. Wir betrachten die $n - 1$ aufeinanderfolgenden Zahlen

$$n! + 2, n! + 3, n! + 4, \dots, n! + n,$$

wobei $n! = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot n$.

Welche dieser Zahlen ist zusammengesetzt?

Also kann der Abstand zwischen zwei aufeinanderfolgende Primzahlen beliebig groß werden.

Primzahlen

Dr. Michael
Welter

Was wissen
wir über
Primzahlen?

Das Sieb des
Eratosthenes

Wieviele
Primzahlen
gibt es?

Weitere Fra-
gestellungen,
die
Primzahlen
beinhalten

Besondere
Primzahlen

Die Frage nach dem kleinstmöglichen Abstand zwischen zwei aufeinanderfolgenden Primzahlen ist schnell beantwortet.

Primzahlen

Dr. Michael
Welter

Was wissen
wir über
Primzahlen?

Das Sieb des
Eratosthenes

Wieviele
Primzahlen
gibt es?

Weitere Fra-
gestellungen,
die
Primzahlen
beinhalten

Besondere
Primzahlen

Die Frage nach dem kleinstmöglichen Abstand zwischen zwei aufeinanderfolgenden Primzahlen ist schnell beantwortet. Der Abstand zwischen 2 und 3 ist gleich 1 und ansonsten liegt zwischen zwei Primzahlen immer zumindest eine gerade Zahl.

Primzahlen

Dr. Michael
Welter

Was wissen
wir über
Primzahlen?

Das Sieb des
Eratosthenes

Wieviele
Primzahlen
gibt es?

Weitere Fra-
gestellungen,
die
Primzahlen
beinhalten

Besondere
Primzahlen

Die Frage nach dem kleinstmöglichen Abstand zwischen zwei aufeinanderfolgenden Primzahlen ist schnell beantwortet.

Der Abstand zwischen 2 und 3 ist gleich 1 und ansonsten liegt zwischen zwei Primzahlen immer zumindest eine gerade Zahl.

Beispiele hierfür sind die Paare 3 und 5, 5 und 7, 17 und 19, $2003663613 \cdot 2^{195000} - 1$ und $2003663613 \cdot 2^{195000} + 1$.

Primzahlen

Dr. Michael
Welter

Was wissen
wir über
Primzahlen?

Das Sieb des
Eratosthenes

Wieviele
Primzahlen
gibt es?

Weitere Fra-
gestellungen,
die
Primzahlen
beinhalten

Besondere
Primzahlen

Die Frage nach dem kleinstmöglichen Abstand zwischen zwei aufeinanderfolgenden Primzahlen ist schnell beantwortet.

Der Abstand zwischen 2 und 3 ist gleich 1 und ansonsten liegt zwischen zwei Primzahlen immer zumindest eine gerade Zahl.

Beispiele hierfür sind die Paare 3 und 5, 5 und 7, 17 und 19, $2003663613 \cdot 2^{195000} - 1$ und $2003663613 \cdot 2^{195000} + 1$.

Definition

Zwei Primzahlen p und q mit $p - q = 2$ bzw. $q - p = 2$ heißen *Primzahlzwillinge*.

Primzahlen

Dr. Michael
Welter

Was wissen
wir über
Primzahlen?

Das Sieb des
Eratosthenes

Wieviele
Primzahlen
gibt es?

Weitere Fra-
gestellungen,
die
Primzahlen
beinhalten

Besondere
Primzahlen

Die Frage nach dem kleinstmöglichen Abstand zwischen zwei aufeinanderfolgenden Primzahlen ist schnell beantwortet.

Der Abstand zwischen 2 und 3 ist gleich 1 und ansonsten liegt zwischen zwei Primzahlen immer zumindest eine gerade Zahl.

Beispiele hierfür sind die Paare 3 und 5, 5 und 7, 17 und 19, $2003663613 \cdot 2^{195000} - 1$ und $2003663613 \cdot 2^{195000} + 1$.

Definition

Zwei Primzahlen p und q mit $p - q = 2$ bzw. $q - p = 2$ heißen *Primzahlzwillinge*.

Primzahlzwillingsvermutung

Es gibt unendlich viele Primzahlen p derart, dass auch $p + 2$ eine Primzahl ist.

Primzahlen

Dr. Michael
Welter

Was wissen
wir über
Primzahlen?

Das Sieb des
Eratosthenes

Wieviele
Primzahlen
gibt es?

Weitere Fra-
gestellungen,
die
Primzahlen
beinhalten

Besondere
Primzahlen

- ▶ Führe das Sieb des Eratosthenes durch.

Primzahlen

Dr. Michael
Welter

Was wissen
wir über
Primzahlen?

Das Sieb des
Eratosthenes

Wieviele
Primzahlen
gibt es?

Weitere Fra-
gestellungen,
die
Primzahlen
beinhalten

Besondere
Primzahlen

- ▶ Führe das Sieb des Eratosthenes durch.
- ▶ Setze die Siebzahl p auf 3.

Primzahlen

Dr. Michael
Welter

Was wissen
wir über
Primzahlen?

Das Sieb des
Eratosthenes

Wieviele
Primzahlen
gibt es?

Weitere Fra-
gestellungen,
die
Primzahlen
beinhalten

Besondere
Primzahlen

- ▶ Führe das Sieb des Eratosthenes durch.
- ▶ Setze die Siebzahl p auf 3.
- ▶ Solange $p^2 \leq N$ gilt:
 - ▶ Gehe zu jeder p -ten Zahl **und streiche die jeweils übernächste Zahl.**

Primzahlen

Dr. Michael
Welter

Was wissen
wir über
Primzahlen?

Das Sieb des
Eratosthenes

Wieviele
Primzahlen
gibt es?

Weitere Fra-
gestellungen,
die
Primzahlen
beinhalten

Besondere
Primzahlen

- ▶ Führe das Sieb des Eratosthenes durch.
- ▶ Setze die Siebzahl p auf 3.
- ▶ Solange $p^2 \leq N$ gilt:
 - ▶ Gehe zu jeder p -ten Zahl **und streiche die jeweils übernächste Zahl.**
 - ▶ Setze p auf die nächste nicht gestrichene Zahl.

Ein Sieb für Primzahlzwillinge

Primzahlen

Dr. Michael
Welter

Was wissen
wir über
Primzahlen?

Das Sieb des
Eratosthenes

Wieviele
Primzahlen
gibt es?

Weitere Fra-
gestellungen,
die
Primzahlen
beinhalten

Besondere
Primzahlen

- ▶ Führe das Sieb des Eratosthenes durch.
- ▶ Setze die Siebzahl p auf 3.
- ▶ Solange $p^2 \leq N$ gilt:
 - ▶ Gehe zu jeder p -ten Zahl **und streiche die jeweils übernächste Zahl.**
 - ▶ Setze p auf die nächste nicht gestrichene Zahl.
- ▶ Streiche 2 und 3.

Ein Sieb für Primzahlzwillinge

Primzahlen

Dr. Michael
Welter

Was wissen
wir über
Primzahlen?

Das Sieb des
Eratosthenes

Wieviele
Primzahlen
gibt es?

Weitere Fra-
gestellungen,
die
Primzahlen
beinhalten

Besondere
Primzahlen

- ▶ Führe das Sieb des Eratosthenes durch.
- ▶ Setze die Siebzahl p auf 3.
- ▶ Solange $p^2 \leq N$ gilt:
 - ▶ Gehe zu jeder p -ten Zahl **und streiche die jeweils übernächste Zahl.**
 - ▶ Setze p auf die nächste nicht gestrichene Zahl.
- ▶ Streiche 2 und 3.

Ergebnis des Siebprozesses:

Ist eine Zahl n nicht gestrichen, so sind $n - 2$ und n Primzahlzwillinge.

Primzahlen

Dr. Michael
Welter

Was wissen
wir über
Primzahlen?

Das Sieb des
Eratosthenes

Wieviele
Primzahlen
gibt es?

Weitere Fra-
gestellungen,
die
Primzahlen
beinhalten

Besondere
Primzahlen

Im letzte Jahr hat TAO u.a. für das folgende Ergebnis eine Fields-Medaille erhalten:

Satz von Tao-Green (2004)

In der Menge der Primzahlen gibt es beliebig lange arithmetische Progressionen,

Primzahlen

Dr. Michael
Welter

Was wissen
wir über
Primzahlen?

Das Sieb des
Eratosthenes

Wieviele
Primzahlen
gibt es?

Weitere Fra-
gestellungen,
die
Primzahlen
beinhalten

Besondere
Primzahlen

Im letzte Jahr hat TAO u.a. für das folgende Ergebnis eine Fields-Medaille erhalten:

Satz von Tao-Green (2004)

In der Menge der Primzahlen gibt es beliebig lange arithmetische Progressionen, d.h. zu jeder natürlichen Zahl N gibt es natürliche Zahlen a und b , so dass die N Zahlen

$$a, a + b, 2a + b, 3a + b, 4a + b, \dots, (N - 1)a + b$$

Primzahlen sind.

Goldbachsche Vermutung

Primzahlen

Dr. Michael
Welter

Was wissen
wir über
Primzahlen?

Das Sieb des
Eratosthenes

Wieviele
Primzahlen
gibt es?

Weitere Fra-
gestellungen,
die
Primzahlen
beinhalten

Besondere
Primzahlen

Primzahlen sind die Bausteine, aus denen die natürlichen Zahlen **multiplikativ** zusammengesetzt sind.
Wie sieht es mit der Addition aus?

Goldbachsche Vermutung

Primzahlen

Dr. Michael
Welter

Was wissen
wir über
Primzahlen?

Das Sieb des
Eratosthenes

Wieviele
Primzahlen
gibt es?

Weitere Fra-
gestellungen,
die
Primzahlen
beinhalten

Besondere
Primzahlen

Primzahlen sind die Bausteine, aus denen die natürlichen Zahlen **multiplikativ** zusammengesetzt sind.

Wie sieht es mit der Addition aus?

Auf GOLDBACH (1690-1764) geht die folgende Vermutung zurück, die bis heute weder bewiesen noch widerlegt werden konnte:

Primzahlen

Dr. Michael
Welter

Was wissen
wir über
Primzahlen?

Das Sieb des
Eratosthenes

Wieviele
Primzahlen
gibt es?

Weitere Fra-
gestellungen,
die
Primzahlen
beinhalten

Besondere
Primzahlen

Primzahlen sind die Bausteine, aus denen die natürlichen Zahlen **multiplikativ** zusammengesetzt sind.

Wie sieht es mit der Addition aus?

Auf GOLDBACH (1690-1764) geht die folgende Vermutung zurück, die bis heute weder bewiesen noch widerlegt werden konnte:

Goldbachsche Vermutung

Jede gerade Zahl > 2 kann als Summe von zwei Primzahlen dargestellt werden.

Primzahlen

Dr. Michael
Welter

Was wissen
wir über
Primzahlen?

Das Sieb des
Eratosthenes

Wieviele
Primzahlen
gibt es?

Weitere Fra-
gestellungen,
die
Primzahlen
beinhalten

Besondere
Primzahlen

Primzahlen sind die Bausteine, aus denen die natürlichen Zahlen **multiplikativ** zusammengesetzt sind.

Wie sieht es mit der Addition aus?

Auf GOLDBACH (1690-1764) geht die folgende Vermutung zurück, die bis heute weder bewiesen noch widerlegt werden konnte:

Goldbachsche Vermutung

Jede gerade Zahl > 2 kann als Summe von zwei Primzahlen dargestellt werden.

Dies impliziert die (im Prinzip bewiesene)

Schwache Goldbachsche Vermutung

Jede ungerade Zahl > 5 kann als Summe von drei Primzahlen dargestellt werden.

Primzahlen

Dr. Michael
Welter

Was wissen
wir über
Primzahlen?

Das Sieb des
Eratosthenes

Wieviele
Primzahlen
gibt es?

Weitere Fra-
gestellungen,
die
Primzahlen
beinhalten

Besondere
Primzahlen

Immer wieder liest man, dass eine neue größte Primzahl gefunden worden ist.

Primzahlen

Dr. Michael
Welter

Was wissen
wir über
Primzahlen?

Das Sieb des
Eratosthenes

Wieviele
Primzahlen
gibt es?

Weitere Fra-
gestellungen,
die
Primzahlen
beinhalten

Besondere
Primzahlen

Immer wieder liest man, dass eine neue größte Primzahl gefunden worden ist. In den letzten Jahren war bei der Jagd stets das GIMPS-Projekt erfolgreich.

www.mersenne.org

Primzahlen

Dr. Michael
Welter

Was wissen
wir über
Primzahlen?

Das Sieb des
Eratosthenes

Wieviele
Primzahlen
gibt es?

Weitere Fra-
gestellungen,
die
Primzahlen
beinhalten

Besondere
Primzahlen

Immer wieder liest man, dass eine neue größte Primzahl gefunden worden ist. In den letzten Jahren war bei der Jagd stets das GIMPS-Projekt erfolgreich.

www.mersenne.org

Hier wird nach Primzahlen der Form

$$2^p - 1$$

gesucht, sog. *Mersenne-Primzahlen*. Für Zahlen dieser Art existieren besonders effiziente Primalitätstests. Zur Zeit kennt man genau 44 Mersenne-Primzahlen; die größte ist

$$2^{32582657} - 1.$$

Primzahlen

Dr. Michael
Welter

Was wissen
wir über
Primzahlen?

Das Sieb des
Eratosthenes

Wieviele
Primzahlen
gibt es?

Weitere Fra-
gestellungen,
die
Primzahlen
beinhalten

Besondere
Primzahlen

Ein einfaches Resultat über Mersenne-Zahlen

Ist $M_n := 2^n - 1$ eine Primzahl, so ist auch n eine Primzahl.

Primzahlen

Dr. Michael
Welter

Was wissen
wir über
Primzahlen?

Das Sieb des
Eratosthenes

Wieviele
Primzahlen
gibt es?

Weitere Fra-
gestellungen,
die
Primzahlen
beinhalten

Besondere
Primzahlen

Ein einfaches Resultat über Mersenne-Zahlen

Ist $M_n := 2^n - 1$ eine Primzahl, so ist auch n eine Primzahl.

Ein Kriterium von Euler (1750)

Ist p eine Primzahl der Form $4n + 3$, so teilt $2p + 1$ die Mersenne-Zahl M_p genau dann, wenn $2p + 1$ eine Primzahl ist.

Primzahlen

Dr. Michael
Welter

Was wissen
wir über
Primzahlen?

Das Sieb des
Eratosthenes

Wieviele
Primzahlen
gibt es?

Weitere Fra-
gestellungen,
die
Primzahlen
beinhalten

Besondere
Primzahlen

Ein einfaches Resultat über Mersenne-Zahlen

Ist $M_n := 2^n - 1$ eine Primzahl, so ist auch n eine Primzahl.

Ein Kriterium von Euler (1750)

Ist p eine Primzahl der Form $4n + 3$, so teilt $2p + 1$ die Mersenne-Zahl M_p genau dann, wenn $2p + 1$ eine Primzahl ist.

Definition

Primzahlen p mit der Eigenschaft, dass auch $2p + 1$ eine Primzahl ist, heißen *Sophie Germain Primzahlen*.

Primzahlen

Dr. Michael
Welter

Was wissen
wir über
Primzahlen?

Das Sieb des
Eratosthenes

Wieviele
Primzahlen
gibt es?

Weitere Fra-
gestellungen,
die
Primzahlen
beinhalten

Besondere
Primzahlen



Primzahlen

Dr. Michael Welter

Was wissen wir über Primzahlen?

Das Sieb des Eratosthenes

Wieviele Primzahlen gibt es?

Weitere Fragestellungen, die Primzahlen beinhalten

Besondere Primzahlen



Primzahlen

Dr. Michael
Welter

Was wissen
wir über
Primzahlen?

Das Sieb des
Eratosthenes

Wieviele
Primzahlen
gibt es?

Weitere Fra-
gestellungen,
die
Primzahlen
beinhalten

Besondere
Primzahlen

Beispiele für Primzahlen p derart, dass auch $2p + 1$ eine Primzahl ist, sind $p = 2, 3, 11, 83, 131$.

Primzahlen

Dr. Michael
Welter

Was wissen
wir über
Primzahlen?

Das Sieb des
Eratosthenes

Wieviele
Primzahlen
gibt es?

Weitere Fra-
gestellungen,
die
Primzahlen
beinhalten

Besondere
Primzahlen

Beispiele für Primzahlen p derart, dass auch $2p + 1$ eine Primzahl ist, sind $p = 2, 3, 11, 83, 131$.

Es ist bis heute nicht bekannt, ob es unendlich viele solcher Primzahlen gibt.

Primzahlen

Dr. Michael
Welter

Was wissen
wir über
Primzahlen?

Das Sieb des
Eratosthenes

Wieviele
Primzahlen
gibt es?

Weitere Fra-
gestellungen,
die
Primzahlen
beinhalten

Besondere
Primzahlen

Beispiele für Primzahlen p derart, dass auch $2p + 1$ eine Primzahl ist, sind $p = 2, 3, 11, 83, 131$.

Es ist bis heute nicht bekannt, ob es unendlich viele solcher Primzahlen gibt.

Solche Primzahlen heißen Sophie Germain Primzahlen, denn Sophie Germain zeigte:

Ist $p > 2$ eine Sophie Germain Primzahl, so gibt es keine ganzen Zahlen x, y, z mit $xyz \neq 0$ derart, dass $x^p + y^p = z^p$ ist.

Primzahlen

Dr. Michael
Welter

Was wissen
wir über
Primzahlen?

Das Sieb des
Eratosthenes

Wieviele
Primzahlen
gibt es?

Weitere Fra-
gestellungen,
die
Primzahlen
beinhalten

Besondere
Primzahlen

Aber das ist wieder eine andere Geschichte...

Primzahlen

Dr. Michael
Welter

Was wissen
wir über
Primzahlen?

Das Sieb des
Eratosthenes

Wieviele
Primzahlen
gibt es?

Weitere Fra-
gestellungen,
die
Primzahlen
beinhalten

Besondere
Primzahlen

Aber das ist wieder eine andere Geschichte...

Ende

Primzahlen

Dr. Michael Welter

Was wissen wir über Primzahlen?

Das Sieb des Eratosthenes

Wieviele Primzahlen gibt es?

Weitere Fragestellungen, die Primzahlen beinhalten

Besondere Primzahlen



Primzahlen

Dr. Michael Welter

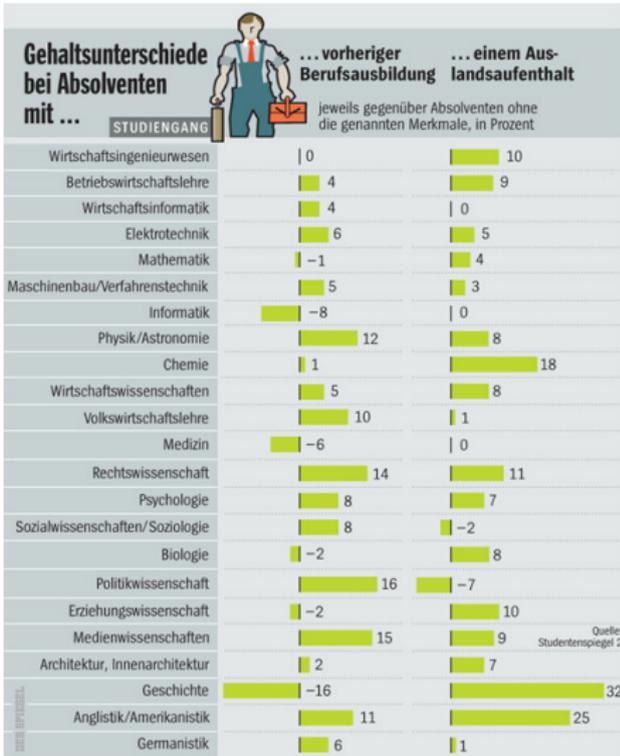
Was wissen wir über Primzahlen?

Das Sieb des Eratosthenes

Wieviele Primzahlen gibt es?

Weitere Fragestellungen, die Primzahlen beinhalten

Besondere Primzahlen



Primzahlen

Dr. Michael Welter

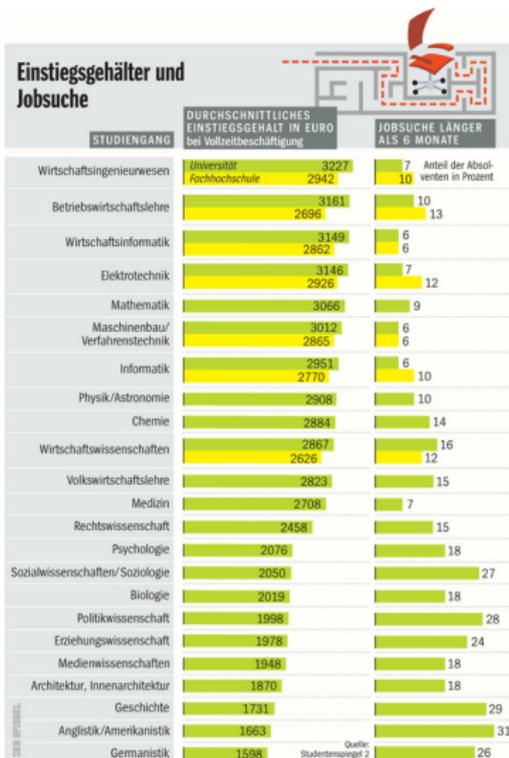
Was wissen wir über Primzahlen?

Das Sieb des Eratosthenes

Wieviele Primzahlen gibt es?

Weitere Fragestellungen, die Primzahlen beinhalten

Besondere Primzahlen



Primzahlen

**Dr. Michael
Welter**

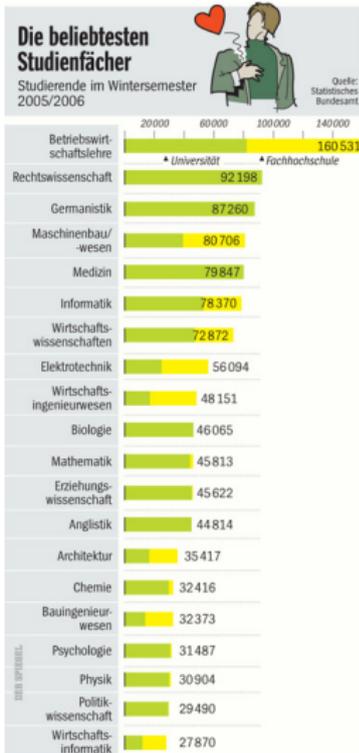
Was wissen wir über Primzahlen?

Das Sieb des Eratosthenes

Wieviele Primzahlen gibt es?

Weitere Fragestellungen, die Primzahlen beinhalten

Besondere Primzahlen



Primzahlen

Dr. Michael Welter

Was wissen wir über Primzahlen?

Das Sieb des Eratosthenes

Wieviele Primzahlen gibt es?

Weitere Fragestellungen, die Primzahlen beinhalten

Besondere Primzahlen

