University Bonn — SS 2018 Ursula Hamenstädt

Einführung in die Geometrie und Topologie

Exercises 3 16. April 2019

3.1. (a) Sei $R = [0,1] \times [0,1]$ versehen mit der Produkttopologie. Definiere eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf R durch $(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2)$ genau wenn entweder $(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$ oder $x_2 = 0, y_2 = 1$ und $x_1 = y_1$. Zeigen Sie, dass der Quotientenraum homöomorph zum Produkt $[0,1] \times S^1$ ist (ein Zylinder).

(b) Sei $X = [0,1] \times S^1$ versehen mit der Produkttopologie. Definiere eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf X durch $(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2)$ genau wenn entweder $(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$ oder $x_1 = 0, y_1 = 1$ und $x_2 = y_2$. Zeigen Sie, dass der Quotientenraum homöomorph zu $S^1 \times S^1$ ist (ein Torus).

3.2. Definiere eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf $\mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$ durch

$$x \sim y \Longleftrightarrow z = \lambda y \text{ mit } \lambda \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

Der Quotientenraum heißt *projektive Ebene* $\mathbb{R}P^2$. Zeigen Sie.

(a) $\mathbb{R}P^2$ ist homöomorph zum Quotienten von S^2 unter der Äquivalenzrelation $x \sim y \Longleftrightarrow x = \pm y$.

(b) Es gibt eine Einbettung $M \to \mathbb{R}P^2$ wobei M das Möbiusband ist.

3.3. Seien A, B abgeschlossene Teilmengen eines topologischen Raumes X. Zeigen Sie, dass A und B zusammenhängend sind wenn dies für $A \cap B$ und $A \cup B$ gilt. Konstruieren Sie ein Beispiel das zeigt, dass diese Aussage im Allgemeinen falsch ist wenn A, B nicht abgeschlossen sind.

3.4. X, Y seien zusammenhängende Räume und $A \subset X$, $B \subset Y$ echte Teilmengen von X, Y. Zeigen Sie, dass das Komplement von $A \times B$ in $X \times Y$ zusammenhängend ist.