University Bonn — SS 2019 Ursula Hamenstädt

Einführung in die Geometrie und Topologie

Exercises 1 2. April 2019

1.1. Zwei Metriken d_1, d_2 auf einer Menge X heißen *äquivalent* wenn sie denselben Konvergenzbegriff erzeugen. Zeigen Sie

(a) d_1, d_2 sind äquivalent wenn es für $i = 1, 2$ und zu jeden $x \in X$ und $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt so dass gilt: $\{y \in X \mid d_i(x, y) < \delta\} \subset \{y \in X \mid d_{i+1}(x, y) < \epsilon\}$.

(b) Für Punkte $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ seien

$$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2|, \quad \|x\|_2 = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$$

und definiere $d_i(x, y) = \|x - y\|_i$ $(i = 1, 2)$. Die Metriken d_1, d_2 sind äquivalent.

1.2. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Zeigen Sie dass durch

$$d'(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$

eine zu d äquivalente Metrik auf X definiert wird.

1.3. Sei X eine (nichtleere) Menge. Zeigen Sie, dass alle Teilmengen von X, deren Komplement endlich oder ganz X ist, eine Topologie auf X definiert. Beschreiben Sie diese Topologie im Fall dass X endlich ist.

1.4. Sei $X = \mathbb{R} \cup \{p\}$ wobei p ein Punkt ist. Zeigen Sie, dass es eine Topologie auf X gibt, deren offene Mengen genau die offenen Teilmengen von $\mathbb{R} \subset X$ (hier ist $\mathbb{R}$ mit der Metrik $d(x, y) = |x - y|$ versehen), alle Mengen von der Form $\{p\} \cup (U - \{0\})$ wobei U eine offene Umgebung von 0 in $\mathbb{R} \subset X$ ist, sowie alle Vereinigungen solcher Mengen sind. (Schwieriger) Gibt es eine Metrik d auf X welche diese Topologie definiert?