**Informationen zur Vorlesung**
**Einführung in die Geometrie und Topologie**

Ursula Hamenstädt

Literatur: Gerd Laures, Markus Szymik, Grundkurs Topologie, Springer Spektrum 2009/2015

# 1. Woche 1

## 1.1. **Metrische Räume.** (Kapitel 1.1 im Buch)

**Definition 1.1** (Metrischer Raum)**.** Sei $X$ eine Menge. Eine *Metrik* auf $X$ is eine Funktion $d\colon X \times X \to [0,\infty)$ mit den folgenden Eigenschaften.

i) *Positivität*: $d(x,y) \geq 0$ für alle $x,y \in X$, $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
ii) *Symmetrie*: $d(x,y) = d(y,x)$.
iii) *Dreiecksungleichung*: $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

$(X,d)$ heißt dann *metrischer Raum*, $d(x,y)$ ist der *Abstand* zwischen $x$ und $y$.
Für $x \in X$ und $r > 0$ sei $B(x,r) = \{y \in X \mid d(x,y) < r\}$ der *offene Ball* vom Radius $r$ um $x$. Eine Teilmenge $U$ von $X$ heißt *offen* falls es zu jedem $x \in U$ ein $\epsilon >$ gibt mit $B(x,\epsilon) \subset U$.
Eine Abbildung $f : (X,d) \to (Y,d')$ zwischen metrischen Räumen heißt *stetig* falls für jede offene Teilmenge $U$ von $Y$ die Menge $f^{-1}U \subset X$ offen ist.

**Beispiele**: **1)** Der *diskrete metrische Raum*.
Sei $X$ eine beliebige Menge; dann definiert

$$d(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \neq y \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

eine Metrik auf $X$. Für jedes $x \in X$ und jedes $\epsilon \in (0,1)1$ gilt $B(x,\epsilon) = \{x\}$.

**2)** Der *euklidische Raum* $\mathbb{R}^n$.
Sei $X = \mathbb{R}^n$ und $d((x_1,\dots,x_n)(y_1,\dots,y_n)) = \|x-y\| = \{\sum(x_i-y_i)^2\}^{\frac{1}{2}}$

Dies definiert eine Metrik auf $\mathbb{R}^n$. Positivität und Symmetrie ergeben sich sofort aus der Definition, die Dreiecksungleichung erhält man wie folgt.

$$d((x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n))^2 = \sum(x_i-y_i)^2$$
$$\leq \sum(|x_i-z_i|+|z_i-y_i|)^2 = \sum(x_i-z_i)^2 + \sum(z_i-y_i)^2 + 2\sum|x_i-z_i||z_i-y_i|$$
$$\leq (\{\sum(x_i-z_i)^2\}^{\frac{1}{2}} + \{\sum(z_i-y_i)^2\}^{\frac{1}{2}})2$$

Hierbei ist die letzte Ungleichung genau die *Cuachy-Schwarzsche* Ungleichung. Es gilt $\|x-y\| = \|x-z\|+\|z-y\|$ genau wenn es ein $s \in [0,1]$ gibt mit $z = x+s(y-x)$, d.h. wenn $z$ auf der Strecke in $\mathbb{R}^n$ liegt, die $x$ mit $y$ verbindet.

1.2. **Topologische Räume.** Definition des Topologischen Raumes, stetige Abbildungen, Umgebungen, konvergente Folgen, Beispiele

Abgeschlossene Mengen, Abschluss, Inneres und Rand einer Menge

Kapitel 1.2 und 1.3 im Buch

## 2. Woche 2

Konstruktion von topologischen Räumen:

Die von einer Abbildung $f : X \to (Y, \mathcal{V})$ auf $X$ induzierte Topologie und ihre charakterisierende Eigenschaft.

Basis und Subbasis einer Topologie

Produkte und ihre Topologie, induziert von den Projektionen auf die Faktoren

Die von einer Abbildung $f : (X, \mathcal{U}) \to Y$ auf $Y$ coinduzierte Topologie und ihre charakterisierende Eigenschaft

Äquivalenzrelationen und der Raum der Äquivalenzklassen mit der Quotiententopologie (=coinduzierte Topologie)

Kapitel 2.1-2.3 im Buch

## 3. Woche 3

Konstruktion von Quotientenräumen: Der Zylinder und das Möbiusband

Zusammenkleben von Räumen, Anheften von Zellen

Ziusammenhängende Räume, Beispiele

Die Zusammenhangskomponente $Z(x)$ eines Punktes $x$

**Beispiel 1.** $Z(x)$ ist nicht notwendig der Durchschnitt aller offenen und abgeschlossenen Mengen ist, die $x$ enthalten.

Wegzusammenhängende Räume

Lokal zusammenhängende und lokal wegzusammenhängende Räume.

**Satz 3.1.** *Ein zusammenhängender und lokal wegzusammenhängender Raum ist zusammenhängend.*

Kapitel 2.4 und 3.1 im Buch

Einige Teile von Kap. 2.4 wurden nicht behandelt. Die Behandlung von wegzusammenhgenden Räumen findet man im Buch in Kapitel 6.

## 4. Woche 4

Trennungseigenschaften (T1) und (T2) (=Hausdorff)

**Satz 4.1.**
(1) *Ein topologischer Raum ist (T1) genau wenn alle einpunktigen Teilmengen abgeschlossen sind.*
(2) *Ein topologischer Raum $X$ ist Hausdorff genau wenn die Diagonale $\Delta$ im Produkt $X \times X$ abgeschlossen ist.*

Vererbung der Trennugseigenschaften auf Unterräume und Produkte

Charakterisierung von der Eigenschaft (T1) in einem Quotientenraum durch Abschluss aller Klassen der definierende Äquivalenzrelation

Hausdorff-Eigenschaft von Räumen, die aus Hausdorff-Räumen durch Anklebung von Zellen entstehen.

Kompaktheit, Beispiel abgeschlossene Wrfel in $\mathbb{R}^n$

Übertragung der Kompaktheit auf abgeschlossene Unterräume eines kompakten Raums

Das Bild eines kompakten Raums unter einer stetigen Abbildung ist kompakt

Folgenkompaktheit fr kompakte Räume mit abzählbaren Umgebungsbasen

Der Begriff der lokalen Kompaktheit, als Beispiel $\mathbb{R}^n$

Kapitel 3.2 und Kapitel 4.1 im Buch

Weitere Trennungseigenschaften (z.B. (T3),(T3a),(T4), normal...) wurden nicht behandelt.

## 5. Woche 5

Kompakte Räume: Definition und erste Eigenschaften.

Beispiele: Abgeschlossene Intervalle in $\mathbb{R}$, abgeschlossene Bälle von endlichem Radius in $\mathbb{R}^n$

Abschlossene Unterräume von kompakten Räumen sind kompakt

In einem Hausdorff-Raum ist eine kompakter Unterraum abgeschlossen

Filter, Ultrafilter und ihre Konvergenz.

Charakterisierung von kompakten Räumen durch Konvergenz aller Ultrafilter.

Der Satz von Tychonoff

Kapitel 4.1 und 4.3 im Buch

## 6. Woche 6

Weitere Eigenschaften kompakter Räume:

**Satz 6.1.** *Sei $(X,\mathcal{U}_2)$ ein kompakter Raum und sei $\mathcal{U}_1$ eine Hausdorff-Topologie auf $X$ die gröber ist als $\mathcal{U}_2$. Dann gilt $\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}_2$.*

Als Folgerung erhält man. Ist $X = \prod_i X_i$ und ist jeder Raum $X_i$ kompakt und Hausdorff, dann ist die Produkttopologie auf $X$ die einzige Topologie welche kompakt und Hausdorff ist und so dass all Projektionen $X \to X_i$ stetig sind.

**Definition 6.1.** Sei $X$ ein topologischer Raum. Eine Familie stetiger Funktion $\mathcal{F} = \{f_i \mid i\}$ *trennt die Punkte von* $X$ falls es zu je zwei Punkten $x, y \in X$ eine stetige Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ gibt mit $x(x) \neq f(y)$.

**Satz 6.2.** *Wenn es auf einem kompakten Raum $X$ eine abzhlbare Familie von stetigen Funktionen gibt welche die Punkte trennt dann ist $X$ metrisierbar.*

Beispiel eines kompakten Raumes: Der Satz von Banach Alaoglu für $\ell^2(\mathbb{N}) = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, \sum_i f(i)^2 < \infty\}$.

Der Satz besagt das Folgende. Sei $\ell^2(\mathbb{N})'$ der Vektorraum aller stetigen linearem Funktionale $\alpha : \ell^2(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$ und sei $K \subset \ell^2(\mathbb{N})$ der (topologische) Unterraum aller Funktionale $\alpha$ so dass $\alpha(f) \in [-1, 1]$ für alle $f \in B(1) = \{f \in \ell^2(\mathbb{R}) \mid \|f\| = \sqrt{\sum_i f(i)^2} \leq 1\}$. Dann ist $K$ versehen mit der Topologie als Unterraum von $\prod_{f \in B(1)} [-1, 1]$ kompakt.

**Satz 6.3.** *Ein Hausdorff Raum $X$ ist genau dann lokal kompakt wenn es einen kompakten Hausdorff-Raum $Y$ so gibt dass $X \subset Y$ und $Y - X = \{\infty\}$.*

Das Material kann in den Büchern von von Querenburg und Munkries nachgelesen werden.

## 7. Woche 7

Die Menge $\pi_0(X)$ eines topologischen Raumes $X$ aller Äquivalenzklassen der Relation, die zwei Punkte miteinander identifiziert falls sie durch einen Weg verbunden werden können.

Berechnung von $\pi_0(X)$ an Beispielen

Definition des Pushouts von Mengen und Räumen

**Satz 7.1.** *Wenn $X = U \cup V$ für offene Mengen $U, V$ dann gilt dass*

(1) *$X$ der Pushout der Megen $U, V$ mittels den Inklusionen $U \cap V \to U, U \cap V \to V$ ist*
(2) *$\pi_0(X)$ der Pushout von $\pi_0(U), \pi_0(V)$ mittels der von der Inklusion induzierten Abbildung $\pi_0(U \cap V) \to \pi_0(U), \pi_0(U \cap V) \to \pi_0(V)$*

Homotopie von Abbildungen; der Homotopiebegriff definiert eine Äquivalenzrelation

Erste Beispiele

Kapitel 6.1 und 6.3 im Buch