1. Kurven im $\mathbb{R}^n$

Die Differentialgeometrie beschäftigt sich mit dem Studium lokaler Eigenschaften – wie zum Beispiel der Krümmung – von Kurven, Flächen und (Unter–)Mannigfaltigkeiten, zunächst in $\mathbb{R}^n$, schließlich in allgemeineren Riemannschen Räumen. Hierzu haben sich die Methoden der Differentialrechnung als besonders geeignet erwiesen. Später untersucht man dann, inwieweit diese lokalen Eigenschaften globale Auswirkungen zeigen.
Bei der Betrachtung von Flächen treten immer wieder in natürlicher Weise lokale Eigenschaften von Kurven auf, was uns veranlaßt, zuerst einmal näher auf Kurven einzugehen.

Definition 1.1. Ein *metrischer Raum* (X, d) ist eine Menge X zusammen mit einer Abbildung $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) $d(x, y) = d(y, x) \geq 0$
(ii) $d(x, y) = 0 \iff x = y$
(iii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \qquad \forall x, y, z \in X$

Beispiel 1.2. (i) $\mathbb{R}^n$ mit dem euklidischen Abstand
(ii) normierte Vektorräume
(iii) Banachräume

Definition 1.3. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine *parametrisierte Kurve* φ ist eine stetige Abbildung $\varphi : I \to X$, wobei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall ist.

Beispiel 1.4. (i) Sei (X, d) *diskreter* metrischer Raum, d.h. $d(x, x) = 0$ und $d(x, y) = 1$ für $x \neq y$. Jede parametrisierte Kurve φ in (X, d) ist konstant, da stetig.
(ii) Die Abbildung $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, gegeben durch $\varphi(t) = \big(t, |t|\big)$, $t \in \mathbb{R}$ ist eine parametrisierte Kurve, allerdings nicht differenzierbar, weil $|t|$ bei $t = 0$ nicht differenzierbar ist.

Definition 1.5. Sei $a \leq b$ und $\varphi : [a, b] \to X$ eine parametrisierte Kurve. Die *Länge* $\ell(\varphi)$ von φ ist das Supremum aller Sehnenlängen $\sum_{i=1}^k d(\varphi(t_{i-1}), \varphi(t_i))$, wobei $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = b$ ist, also $\ell(\varphi) := \sup_{a=t_0<t_1<\ldots<t_k=b} \sum_{i=1}^k d(\varphi(t_{i-1})$. φ heißt *rektifizierbar*, falls $\ell(\varphi) < \infty$.

Beispiel 1.6. (a) Ist (X, d) diskreter metrischer Raum, dann ist jede Kurve φ rektifizierbar mit $\ell(\varphi) = 0$.
(b) Seien $\varphi_1 : [a, b] \to X$, $\varphi_2 : [b, c] \to X$, $\varphi_2(b) = \varphi_1(b)$.
Setze $\varphi : [a, c] \to X$, $\varphi_{|[a,b]} = \varphi_1$, $\varphi_{|[b,c]} = \varphi_2$. Dann ist $\ell(\varphi) = \ell(\varphi_1) + \ell(\varphi_2)$.

Definition 1.7. Eine *Umparametrisierung* von $\varphi : I \to X$ ist eine Kurve $\varphi' : I' \to X$ so, daß ein Homöomorphismus $f : I \to I'$ existiert mit $\varphi'(f(t)) = \varphi(t)$.

Lemma 1.8. *Ist φ' eine Umparametrisierung von φ, dann gilt $\ell(\varphi') = \ell(\varphi)$.*

Beweis. Unter einem Homöomorphismus geht jede Unterteilung in eine andere Unterteilung über. □

Lemma 1.9. *Sei (X, d) ein metrischer Raum, füer jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $\varphi_j : I \to X$ eine rektifizierbare Kurve. Die Folge (φ_j) konvergiere punktweise gegen eine stetige Kurve $\varphi : I \to X$ und es gelte* $\liminf_{j\to\infty} \ell(\varphi_j) < +\infty$. *Dann ist auch die Kurve φ rektifizierbar und es gilt*

$$\ell(\varphi) \leq \liminf_{j\to\infty} \ell(\varphi_j).$$

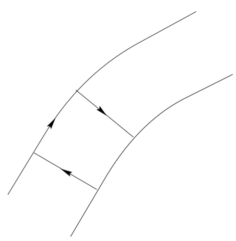
Beweis. Indem man gegebenenfalls zu einer Teilfolge übergeht, kann man oBdA $\liminf \ell(\varphi_j) = \lim \ell(\varphi_j)$ annehmen. Sein nun $\epsilon > 0$ beliebig, dann gibt es ein $j_0 \in \mathbb{N}$ so, daß für alle $j > j_0$ $\ell(\varphi_j) \leq \lim_{j\to\infty} \ell(\varphi_j)+\epsilon$. Sei $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = b$ eine Unterteilung des Intervalls $I = [a, b]$. Da die Folge φ_j punktweise konvergiert, kann man $j_0(\epsilon, k) > 0$ so wählen, daß

$$d\big(\varphi_j(t_i), \varphi(t_i)\big) \leq \frac{\epsilon}{2k} \quad \text{für } j \geq j_0,\ i = 0, \ldots, k\ .$$

Für $j \geq j_0$ gilt dann

$$\begin{aligned}
\ell(\varphi) &\leq \sum_{i=1}^{k} d\big(\varphi(t_{i-1}), \varphi(t_i)\big) + \epsilon \\
&\leq \sum_{i=1}^{k} d\big(\varphi(t_{i-1}), \varphi_j(t_{i-1})\big) + \big(\varphi_j(t_{i-1}), \varphi_j(t_i)\big) + d\big(\varphi_j(t_i), \varphi(t_i)\big) \\
&\leq \sum_{i=1}^{k} d\big(\varphi_j(t_{i-1}), \varphi_j(t_i)\big) + \frac{\epsilon}{k} \\
&\leq \left(\sum_{i=1}^{k} d\big(\varphi_j(t_{i-1}), \varphi_j(t_i)\big)\right) + \epsilon \\
&\leq \ell(\varphi_j) + \epsilon \\
&\leq \lim_{j\to\infty} \ell(\varphi_j) + 2\epsilon
\end{aligned}$$

und es folgt



$$\ell(\varphi) \leq \liminf_{j\to\infty} \ell(\varphi_j)\ .$$

□

Betrachtet man nun differenzierbare Kurven, so ist für Geradenstücke die Rektifizierbarkeit klar und Kurven kann man zumindest durch Geraden (Ableitung) approximieren.

Lemma 1.10. *Ist $\varphi : [0, 1] \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar, dann gilt*

$$\ell(\varphi) = \int_0^1 ||\varphi'(t)||\, dt.$$

Beweis. Da I kompakt, ist φ' gleichmäßig stetig, das heißt zu $\epsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ |t - s| < \delta \Rightarrow ||\varphi'(t) - \varphi'(s)|| < \epsilon$. Man hat $\varphi(s + \tau) - \varphi(s) = \varphi'(s)\tau + o(\tau) = \int_s^{s+\tau} \varphi'(\sigma)\, d\sigma$, und damit, da nach Definition $o(\tau) \leq \epsilon\tau$

$$(*) \qquad ||\varphi(s + \tau) - \varphi(s)|| \geq ||\varphi'(s)||\, \tau - \epsilon\tau \geq \int_s^{s+\tau} ||\varphi'(\sigma)||\ d\sigma - 2\epsilon\tau\ .$$

Für eine Unterteilung $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = 1$ mit $|t_i - t_{i-1}| < \delta$ gilt dann

$$\sum_{i=1}^{k} \|\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})\| \geq \int_0^1 \|\varphi'(\sigma)\| \; d\sigma - 2\epsilon \sum_{i=1}^{k} |t_{i-1} - t_i| = \int_0^1 \|\varphi'(\sigma)\| \; d\sigma - 2\epsilon \; .$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig, ist also

$$\ell(\varphi) \geq \int_0^1 \|\varphi'(\sigma)\| \; d\sigma \; .$$

$(*)$ kann man auch nach oben abschätzen:

$$\|\varphi(s+\tau) - \varphi(s)\| \leq \|\varphi'(s)\| \, \tau + \epsilon\tau \; .$$

Damit folgt dann analog

$$\ell(\varphi) \leq \int_0^1 \|\varphi'(\sigma)\| \; d\sigma \; .$$

□

Beispiel 1.11. (a) Sei $\varphi_j(t) = \frac{1}{j}(\sin jt, \cos jt)$ $(t \in [0, 2\pi])$ also φ_j j–mal durchlaufener Kreis vom Radius $\frac{1}{j}$. Dann ist

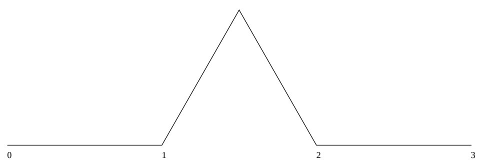
$$\ell(\varphi_j) = \int_0^{2\pi} \left\| \tfrac{1}{j}(j\cos jt, -j\sin jt) \right\| \; dt = \int_0^{2\pi} 1 \, dt = 2\pi \; .$$

φ_j konvergiert nun gleichmäßig gegen $\varphi \equiv 0$ mit $\ell(\varphi) = 0$ für $j \to \infty$. Im allgemeinen gilt also tatsächlich das $\leq$ aus Lemma 1.9.

(b) Kochsche Kurve (Schneeflockenkurve): Sei f_1 Polygonzug aus 4 Stücken der Gesamtlänge 4, der durch Unterteilung von $f_0 := [0, 3]$ und Ersetzung von $[1, 2]$ durch 2 Seiten eines Dreiecks entsteht.

$$\|f_1(t) - f_0(t)\| \leq 1 \qquad \forall t$$

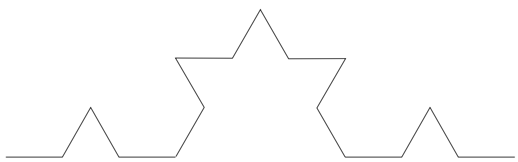
f_2 entsteht aus f_1 durch Ersetzung jeder Strecke der Länge 1 durch einen Polygonzug entsprechend



$\frac{1}{3} f_1$ mit Länge$(f_2) = \frac{4}{3} \cdot 4$, und

$$\|f_2(t) - f_1(t)\| \leq \tfrac{1}{3} \qquad \forall t$$

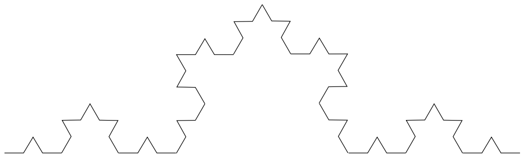
Iterative Konstruktion von f_i so, daß



$$\|f_i(t) - f_{i-1}(t)\| \leq \left(\tfrac{1}{3}\right)^{i-1} \qquad \forall t$$

Betrachte nun die Bogenlänge

$$\ell(f_i) = \left(\tfrac{4}{3}\right)^{i-1} \cdot 4 \qquad \Rightarrow \ell(f_j) \to \infty \quad \text{für } j \to \infty \; .$$

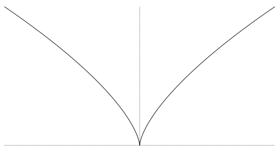


Außerdem ist f_i Polygonzug; jede Ecke von f_{i-1} ist auch Kurvenpunkt von f_i, denn die Ecken bleiben erhalten. Für $j > i \geq 1$ gilt $\|f_i(t) - f_j(t)\| \leq \sum_{\ell=i}^{j-1} \left(\frac{1}{3}\right)^\ell$ (Cauchyfolge), also konvergieren die f_i punktweise gegen eine Grenzfunktion f mit $\ell(f) = \infty$, denn für alle i gilt

$$\ell(f) \geq \sum_{\ell=1}^{m} \|f_i(t_\ell) - f_i(t_{\ell-1})\| = \ell(f_i) \ ,$$

wobei $f_i(t_\ell)$ die Ecken von f_i sind. Damit folgt mit 1.10, daß f nicht stetig differenzierbar ist.

(c) Betrachte die Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, gegeben durch $f(t) = (t^3, t^2)$. Für diese Abbildung ist $f'(0) = (0,0)$, das heißt, f ist stetig differenzierbar, der Geschwindigkeitsvektor ist Null für $t = 0$, und f hat eine „Ecke“ (singulärer Punkt). Solche singulären Punkte stören bei „vernünftigen“ Kurven. Es empfiehlt sich, Kurven zu betrachten, die $f'(t) \neq 0$ haben. Dann passiert das nicht.



Das führt uns zu folgender

Definition 1.12. Eine differenzierbare Kurve $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ heißt *regulär*, falls

$$\varphi'(t) \neq 0 \quad \forall\, t \in I.$$

Sie heißt *nach der Bogenlänge parametrisiert*, falls

$$\|\varphi'(t)\| = 1 \quad \forall\, t \in I.$$

Bemerkung. Ist φ nach der Bogenlänge parametrisiert, dann gilt

$$\ell(\varphi_{|[0,t]}) = t = \int_0^t \|\varphi'(s)\| \ ds \ ,$$

d.h. der Parameter t gibt genau die Länge von φ bis zu diesem Punkt an. Man kann jede reguläre Kurve so parametrisieren, denn man wählt einfach $t = \ell(\varphi_{|[0,t]})$.

OBdA behandeln wir bis auf weiteres Kurven $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}^n$, $\varphi \in C^\infty$, und formalisieren als nächstes unsere obige Bemerkung.

Satz 1.13. *Jede reguläre Kurve hat eine Parametrisierung nach der Bogenlänge.*

Beweis. Sei $\varphi'(t) \neq 0$ $\forall t$ (also φ regulär), dann definiere $\alpha : \tau \mapsto \int_0^\tau \|\varphi'(t)\| \ dt$. α ist jedenfalls differenzierbar und streng monoton wachsend ($\alpha' > 0$). α ist also Diffeormorphismus, $\alpha : [0,1] \longrightarrow [0, \ell(\varphi)]$. Setze $\tilde{\varphi}\big(\alpha(t)\big) = \varphi(t)$. $\tilde{\varphi}$ ist nach der Bogenlänge parametrisiert, denn

$$\|\tilde{\varphi}'(t)\| = \big\|(\varphi \circ \alpha^{-1})'(t)\big\| = \big\|\varphi'\big(\alpha^{-1}(t)\big)\big\| \left|\frac{1}{\alpha'\big(\alpha^{-1}(t)\big)}\right| = \frac{\big\|\varphi'\big(\alpha^{-1}(t)\big)\big\|}{\big\|\varphi'\big(\alpha^{-1}(t)\big)\big\|} = 1 \ .$$

$\square$

Beispiel 1.14. (a) Sei φ regulär ohne Selbstüberschneidung. Dann ist die

$$\operatorname{Spur}(\varphi) = \{\varphi(t) \,|\, t \in]0,1[\,\}$$

eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^n$, d.h. es gibt eine Karte $\Phi : U \to \mathbb{R}^n$ mit $\Phi^{-1}(\mathbb{R} \times \{0\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}) = \varphi(I) \cap U$ (Die Spur liegt also lokal in $\mathbb{R}^n$ wie eine Gerade), denn man hat keine Selbstüberschneidung, also dreht man die Kurve so, daß die Tangente in $\varphi(t) = p$ parallel bzw. gleich der x_1–Achse ist. In einer Umgebung von p erhält man durch

$$(t, x_2, \ldots, x_n) \mapsto (\varphi(t), x_2, \ldots, x_n)$$

einen lokalen Diffeormorphismus mit Jacobimatrix

$$J_\Phi = \begin{pmatrix} \varphi' & 0 \\ \vdots & \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^{n-1}} \end{pmatrix}, \quad \varphi' \neq 0 \ .$$

(b) Die Kurve $t \mapsto (t^3, t^2)$ kann nach der Bogenlänge parametrisiert werden, aber die Spur von φ ist *keine* Untermannigfaltigkeit, denn φ hat eine Ecke, dort ist also die Tangente nicht eindeutig bestimmt. Man kann auch erhalten: Wenn man φ nach der Bogenlänge parametrisieren kann, muß φ Lipschitz–stetig sein. Sie kann auch Ecken haben, nur muß die Eckenmenge eine Nullmenge bezüglich des Lebesgue Maßes sein.

Man kann die Ableitung einer nach der Bogenlänge parametrisierten Kurve φ als Funktion in den Einheitskreis auffassen:

(a) Ableitung konstant $\Rightarrow$ φ ist Geradensegment
(b) Ableitung variabel $\Rightarrow$ φ ist “gekrümmt”.

Anschaulich betrachtet ändern gekrümmte Kurven ihre Richtung, und zwar umso mehr, je stärker die Kurve gekrümmt ist. Das führt uns dazu, die Änderungsgeschwindigkeit der Richtung der Kurve als Maß für die Krümmung einzuführen und zu folgender

Definition 1.15. Die *Krümmung* $\kappa(s)$ einer nach der Bogenlänge parametrisierten Kurve φ ist definiert durch

$$\kappa(s) = ||\varphi''(s)||.$$

Bemerkung 1.16. (a) $\kappa(s) = 0 \ \forall s \Leftrightarrow \ \varphi$ ist ein Geradensegment.

(b) Gilt $\kappa(s) \neq 0 \, \forall \, s$, dann existiert ein eindeutig bestimmter Einheitsvektor $n(s)$ mit

$$\varphi''(s) = \kappa(s)\, n(s).$$

$n(s)$ heißt die *Normale* an φ in s, da gilt

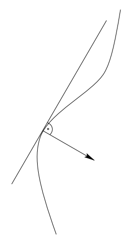
$$n(s) \perp \varphi'(s) \ ,$$

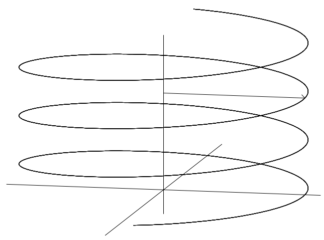
denn $0 = \frac{d}{ds} ||\varphi'(s)||^2 = \frac{d}{ds} \langle \varphi'(s), \varphi'(s) \rangle = 2 \langle \varphi''(s), \varphi'(s) \rangle$, woraus folgt $\varphi''(s) \perp \varphi'(s)$, und $n(s)$ zeigt in Richtung der Krümmung:

Die von $\varphi'(s)$ und $n(s)$ aufgespannte Ebene heißt *Schmiegebene* der Kurve in s.

Beispiel 1.17. Eine *Helix* ist definiert durch $\varphi(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$, $a, b \geq 0$, $a^2 + b^2 \neq 0$. Durch die Parametertransformation $t \mapsto t/c$ mit $c^2 = a^2 + b^2$ erhält man Bogenlängenparametrisierung, also $\varphi(t) = \big(a \cos(t/c), a \sin(t/c), bt/c\big)$.

(i) $a = 0 \Longrightarrow \varphi$ ist eine senkrechte Gerade, $\kappa \equiv 0$





(ii) $b = 0 \Longrightarrow \varphi$ ist eine ebene Kurve, und zwar ein Kreis vom Radius a, $\kappa \equiv \frac{1}{a}$. Die Schmiegebene ist die Ebene, in der der Kreis liegt.

(iii) $b \neq 0,\ a \neq 0$: die Schmiegebene verläuft nicht parallel zu den Achsen.

Wir betrachten nun den Spezialfall einer *ebenen Kurve*: Man kann eine orientierte Krümmung definieren, je nachdem, ob die Orientierung des Systems (φ', n) der Orientierung (e_1, e_2) entspricht oder nicht.
Genauer: Ist φ eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve, dann gibt es zu jedem t genau einen Einheitsvektor $e_2(t)$ mit den folgenden Eigenschaften:

(a) $e_2(t) \perp \varphi'(t)$

(b) Die Basis $\big(\varphi'(t), e_2(t)\big)$ ist positiv orientiert.

Definition 1.18. Sei φ nach der Bogenlänge parametrisiert und e_2 der eindeutig bestimmte Einheitsvektor mit $e_2 \perp \varphi'(t)$ und die Basis $(\varphi'(t), e_2(t))$ von $\mathbb{R}^2$ positiv orientiert, dann heißt

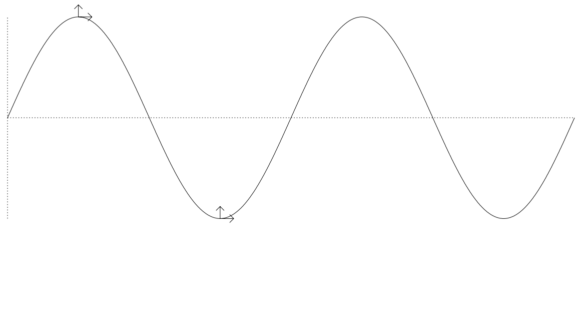
$$(\varphi'(t), e_2(t))$$

das *begleitende 2-Bein (moving frame)* von φ und es gelten die folgenden Ableitungsgleichungen:

$$\varphi''(t) = a(t) \cdot e_2(t),\ \ e_2(t) = i\varphi'(t) \quad (\text{reell: } \langle e_2(t), \varphi'(t)\rangle = 0) \quad \Longrightarrow e_2'(t) = -a(t)\varphi'(t)$$

$a(t)$ heißt *orientierte Krümmung* von φ $(a : \mathbb{R} \to \mathbb{R})$.

Beispiel 1.19. $\varphi(t) = (t, \sin t)$ (Graph von $\sin t$)



$a > 0$: die Kurve liegt auf derselben Seite von $\varphi'(t)$ wie $e_2(t)$
$a < 0$: die Kurve liegt auf der entgegengesetzten Seite von $\varphi'(t)$ wie $e_2(t)$.

(Für weitere Definitionen wie Windungszahl etc. s. Klingenberg.)

2. Riemannsche Mannigfaltigkeiten

Definition 2.1. Ein $\mathcal{C}-^{\infty}$ *Atlas* auf einem topologischen Hausdorffraum M ist gegeben durch

(i) eine offene Überdeckung $\mathcal{U} = \{U_i \mid i \in I\}$ von M

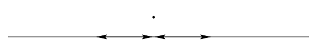
(ii) eine Familie von Homöomorphismen $\varphi_i : U_i \to V_i$ (wobei die V_i offene Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ sind), so daß für alle $i, j \in I$, der Homöomorphismus $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ ein Diffeomorphismus von $\varphi_i(U_i \cap U_j)$ nach $\varphi_j(U_i \cap U_j)$ ist.

Die (U_i, φ_i) heißen *Karten* und $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ *Kartenwechsel.* Der topologische Hausdorffraum M mit dem $\mathcal{C}^{\infty}$-Atlas heißt *lokal euklidisch.*

Definition 2.2. Ein $\mathcal{C}^{\infty}$-Atlas heißt maximal, wenn er alle Karten enthält, welche differenzierbar miteinander wechseln. Eine *differenzierbare Struktur* ist ein maximaler $\mathcal{C}^{\infty}$-Atlas.

Definition 2.3. Eine *differenzierbare Mannigfaltigkeit* ist ein Paar $(M, \mathcal{D})$, bestehend aus einem Hausdorffraum M, der das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt (d.h. die Topologie besitzt eine abzählbare Basis), und einer differenzierbaren Struktur $\mathcal{D}$ für M.

Bemerkung. (i) Die Hausdorffsche Trennungseigenschaft folgt *nicht* aus den lokalen Eigenschaften der differenzierbaren Struktur. Als Gegenbeispiel wählt man $\mathbb{R}$ zusammen mit einem Punkt p und erklärt die Topologie auf $M = \mathbb{R} \cup \{p\}$ dadurch, daß $\mathbb{R} \subset M$ offen ist, und die Umgebungen von p die Mengen $(U - \{0\} \cup \{p\}$ sind, wobei u eine Umgebung der $0 \in \mathbb{R}$ ist.



(ii) Das zweite Abzählbarkeitsaxiom hat nicht allein technische Bedeutung für induktive Konstruktionen und Beweise, bei denen man von lokalen Kenntnissen ausgeht und dann von $U_1 \cup \cdot \cup U_r$ auf $U_1 \cup \cdot \cup U_{r+1}$ schließt, würde man es streichen so wären z.B. die Metrisierbarkeit von Mannigfaltigkeiten, die Whitneyschen Einbettungssätzt und der Satz von Sard nicht mehr richtig.

Definition 2.4. Eine Teilmenge M von $\mathbb{R}^{n+k}$ heißt eine *n–dimensionale Untermannigfaltigkeit* vom $\mathbb{R}^{n+k}$, falls es für jeden Punkt $x \in M$ eine offene Umgebung U von x und eine offene Umgebung $V \subset \mathbb{R}^n$ von 0, und einen Diffeomorphismus $h : U \to V$ mit

$$h(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\}) = \{y \in V \mid y^{k+1} = \ldots = y^n = 0\}.$$

Definition 2.5. Seien M und N zwei Mannigfaltigkeiten. Eine stetige Abbildung $f : M \to N$ heißt *differenzierbar*, falls es für jedes $x \in M$ Karten (U, φ) und (V, ψ) mit $x \in U$ und $f(x) \in f(U) \subset V$ gibt, so daß die Abbildung

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \psi(V)$$

differenzierbar ist.

Bemerkung. Die Definition hängt nicht von der Wahl der Karten für x und $f(x)$ ab, denn es gilt:

$$\begin{aligned} &\psi_1 \circ f \circ \varphi_1^{-1} \text{ differenzierbar} \\ &\Longrightarrow (\psi_2 \circ \psi_1^{-1}) \circ \psi_1 \circ f \circ \varphi_1^{-1} \circ (\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}) = \psi_2 \circ f \circ \varphi_2^{-1} \text{ differenzierbar} \end{aligned}$$

Definition 2.6. Eine glatte Abbildung $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ ist eine *Submersion* (bzw. *Immersion*) in $x \in \mathbb{R}^n$, falls das Differential $\mathrm{D}_x g$ in x eine surjektive (bzw. injektive) Abbildung vom $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^p$ ist.

Definition 2.7. Seien M und N zwei Mannigfaltigkeiten. Eine glatte Abbildung $f : M \to N$ ist eine *Submersion* (bzw. *Immersion*) in $m \in M$, falls für eine Karte (U, φ) von M um m und eine Karte (V, ψ) von N um $f(m)$ die Abbildung $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ eine Submersion (bzw. Immersion) ist.

Bemerkung. Die Definition ist unabhängig von der Wahl der Karten.

Definition 2.8. Sei M eine n–dimensional Mannigfaltigkeit und $m \in M$. Es bezeichne $\mathcal{K}_m(M)$ die Menge der diffenreenzierbaren Kurven in M, die bei $t = 0$ durch m gehen, genauer

$$\mathcal{K}_m(M) = \{c : (-\epsilon, \epsilon) \to M | \, \epsilon > 0 \text{ und } (0) = m\} \ .$$

Zwei solche Kurven heißen *tangential äquivalent*, $c \sim \tilde{c}$, wenn für eine Karte (U, φ) um m gilt

$$(\varphi \circ \tilde{c})'(0) = (\varphi \circ c)'(0) \in \mathbb{R}^n \ .$$

Die Äquivalenzklassen $[c] \in \mathcal{K}_m / \sim$ heißen dann die *Tangentialvektoren* von M in m und $T_mM := \mathcal{K}_m / \sim$ heißt der *Tangentialraum* an M in m.

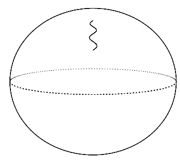
Bemerkung. Die Definition ist unabhängig von der Wahl der Karte, da

$$(\varphi \circ c)'(0) = (\psi \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ)'(0) = (\psi \circ \varphi^{-1})'(\varphi(c(0)) \cdot (\varphi \circ c)'(0).$$

$S^2 \subset \mathbb{R}^3$ ist eine Untermannigfaltigkeit (des $\mathbb{R}^3$) und sieht lokal aus wie der $\mathbb{R}^2$ (durch die stereographische Projektion). $\varphi : I = [0, 1] \to \mathbb{R}^3$ sei regulär, $\varphi(t) \in S^2 \ \forall t$, mit Länge $\ell(\varphi) = \int_0^1 \|\varphi'(t)\| \ dt$. Eine Tangente an φ ist immer auch tangential an S^2!
Der Tangentialraum $T_{\varphi(t)}S^2$ von S^2 in $\varphi(t)$ ist in diesem Falle eine Ebene in $\mathbb{R}^3$, und zwar diejenige Ebene, die auf dem Ortsvektor $\varphi(t)$ senkrecht steht.
Im euklidischen Raum $\mathbb{R}^n$ war es uns gelungen, einer Kurve eine Länge und eine Krümmung zuzuordnen. Können wir auf S^2 ähnliche Eigenschaften finden? Wir hatten die Krümmung einer Kurve φ als $\kappa(s) = \|\varphi''(s)\|$ definiert. Aber der Vektor φ'' liegt jetzt im allgemeinen nicht mehr tangential an die Sphäre selbst, oder anders ausgedrückt, er zerfällt in eine radiale Komponente, die die Krümmung der Sphäre bestimmt, und in eine tangentiale Komponente, die der Krümmung der Kurve selbst entspricht. Will man nun von gekrümmten Kurven auf S^2 sprechen, ist der radiale Anteil natürlich störend, da eine Eigenschaft der Fläche selbst.
Da man das Skalarprodukt (in $\mathbb{R}^3$) auf $\mathbb{R}^2$ einschränken kann, hat man auch im Tangentialraum ein Skalarprodukt, bezeichnet mit $g_{\varphi(t)}$, d.h. $\ell(\varphi) = \int_0^1 \{g_{\varphi(t)}(\varphi'(t), \varphi'(t))\} \ dt$. Für jeden Punkt von T hat man das Skalarprodukt, also auch den (nichtorientierten) Winkel.
Man wird im folgenden eine Riemannsche Metrik definieren, d.h. eine differenzierbare Abbildung, die $T_{\varphi(t)}S^2$ ein Skalarprodukt zuordnet.
Wir hatten die Länge einer Kurve als das Supremum über die Sehnenlängen definiert, und für differenzierbare Kurven gezeigt, daß

$$\ell(\varphi) = \int_0^1 \|\varphi'(t)\| \ dt \ .$$

Sei nun φ Kurve auf $S^2 \subset \mathbb{R}^3$: Wie macht man das hier? Ein Punkt v auf S^2 ist gegeben durch seinen Ortsvektor, $\|v\| = 1$. Die Tangentialebene an v ist gegeben durch $T_v = \{x \in \mathbb{R}^n | \ \langle x, v\rangle = 0\}$. T_v ist in v „angeheftet“.
Das Skalarprodukt ist eine symmetrische, positiv definite Bilinearform. Die Menge der symmetrischen Bilinearformen über dem Vektorraum V ist selbst ein Vektorraum, den wir im folgenden mit $S^2(V)$



bezeichnen. Dabei ist $S^2(V)$ isomorph zum Raum der symmetrischen (n,n)–Matrizen $\mathrm{Sym}(n)$ für $\dim V = n$, denn ist $\alpha \in S^2(V)$, dann hat die Matrix von α bezüglich einer (festen) Basis $\{e_1, \ldots, e_n\}$ von v die Einträge $\alpha(e_i, e_j) = a_{ij}$.
Man kann an $v \in V$ genausogut einen Skalarproduktraum (anstelle des T_v) anheften. Das variiert mit den Punkten, genau wie bei den Tangentialräumen.
Man hat eine lokale Basis von TS^2 um v; dann „sieht" der angeheftete Raum „lokal so aus" wie $S^2(T_v) = S^2(V)$. Präzisierung folgt auf dem Fuße:

Definition 2.9. Ein *k–dimensionales Vektorbündel* über einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M ist eine differenzierbare Mannigfaltigkeit E zusammen mit einer differenzierbaren Abbildung $\pi : E \to M$, so daß gilt

(i) π ist surjektiv
(ii) Es gibt eine Überdeckung $\mathcal{U}$ von M, $\mathcal{U} = \{U_i | \, i \geq 1\}$ aus offenen Mengen U_i, und zu U_i gibt es einen Diffeomorphismus $\varphi_i : \pi^{-1}(U_i) \to U_i \times \mathbb{R}^k$, (wobei $\pi^{-1}(U_i)$ die Menge aller Vektoren ist, die an ein $u \in U_i$ angeheftet sind), so daß $\varphi_i(\pi^{-1}(u)) = \{u\} \times \mathbb{R}^k$

Man muß bei der Anheftung von sich überschneidenden „Zuständigkeitsbereichen" so arbeiten, daß die Vektorraumstruktur erhalten bleibt, d.h. die Abbildungen müssen linear (und natürlich bijektiv) sein.

(iii) Sei $GL(k)$ die *allgemeine lineare Gruppe* der Dimension k. Dann existiert zu i, j eine Abbildung $a_{ij} : U_i \cap U_j \to \mathrm{GL}(k)$ mit $(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})(u, x) = (u, a_{ij}(u)x) \quad u \in U_i \cap U_j,\ x \in \mathbb{R}^k$.
Die a_{ij} heißen *Übergangsfunktionen* bezüglich der *lokalen Trivialisierung*

$$\varphi_i : \pi^{-1}(U_i) \to U_i \times \mathbb{R}^k$$

Bemerkung. (i) $GL(k) \cong \{M_k(\mathbb{R}) | \det M \neq 0\}$
Mit anderen Worten: $GL(k)$ ist eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, denn sie ist offene Teilmenge von $\mathbb{R}^{k^2}$ (det ist stetig und das Urbild von offenen Mengen ist daher offen).

(ii) Ist $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $e_1, \ldots, e_k$ die Standardbasis vom $\mathbb{R}^k$, dann gilt

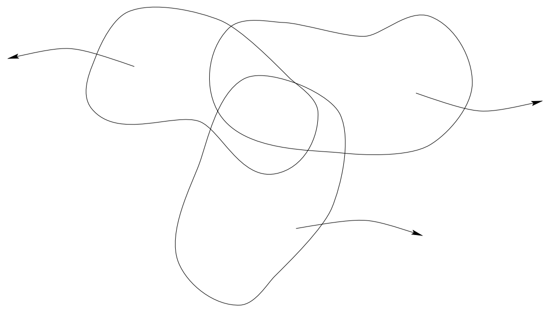
$$\alpha : U \to \mathrm{GL}(k) \text{ ist differenzierbar } \iff \alpha_j : U \to \mathbb{R}^k,$$
$$\alpha_j(U) := \alpha(u)e_j \text{ differenzierbar } \forall\, j \in \{1, \ldots, k\}$$

(Gleichwertig dazu ist, daß alle Koordinatenfunktionen (= Eintragsfunktionen) differenzierbar sind, weil $Ae_j = A_j$ (j–te Spalte von A) gilt. Damit wären wir wieder bei der normalen Differenzierbarkeit.)

Für die Standardbasis $e_1, \ldots, e_k$ von $\mathbb{R}^k$ ist $u \mapsto (\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})(u, e_l) = (u, a_{ij}(u)e_l)$ differenzierbar für $l = 1, \ldots k$, denn $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ ist Diffeomorphismus, also ist für alle i, j die Abbildung $a_{ij} : U_i \cap U_j \to \mathrm{GL}(k)$ differenzierbar.

Ein Vektorbündel ist also festgelegt durch eine offenen Überdeckung $\mathcal{U} = \{U_i, i \geq 1\}$ von M und differenzierbaren Abbildungen $a_{ij} : U_i \cap U_j \to \mathrm{GL}(k)$ wie folgt:

(a) $a_{ii} \equiv \mathrm{Id}_{GL(k)} \quad \forall i$
(b) $a_{ij}(u) = (a_{ji})(u)^{-1} \quad \forall i, j$



(c) $(a_{ij})(u) \circ (a_{j\ell})(u) = a_{i\ell}(u)$ für $u \in U_i \cap U_j \cap U_\ell$

Bemerkung. Sind U_i Koordinatenumgebungen von M, dann sind auch φ_i Koordinaten von E via $U_i \cong V_i \subset \mathbb{R}^n$. $E_u := \pi^{-1}(u)$ heißt *Faser* (Menge der angehefteten Vektoren über u) von E über u und trägt die Struktur eines reellen Vektorraums. Die lokalen Trivialisierungen φ_i erhalten die Struktur der Faser. (Vorsicht: nicht alle Karten tun das!)

Satz 2.10. *Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und $\mathcal{U} = \{U_i | i \geq 1\}$ eine offene Überdeckung. Zu $(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ existiere eine differenzierbare Abbildung $a_{ij} : U_i \cap U_j \to GL(k)$, so daß gilt*

(i) $a_{ii} = \mathrm{Id}_{GL(k)} \quad \forall\, i$
(ii) $a_{ij}(u) = a_{ji}(u)^{-1} \quad \forall\, u \in U_i \cap U_j$
(iii) $a_{ij}(u) \circ a_{jl}(u) = a_{il}(u) \quad \forall\, u \in U_i \cap U_j \cap U_l$

Dann existiert ein Vektorbündel über M mit den Übergangsfunktionen a_{ij}.

Beweis. Sei $\mathcal{E} = \mathring{\bigcup}_i U_i \times \mathbb{R}^k$ disjunkte Vereinigung. (Jetzt muß man zusammenstückeln, und das Ganze soll auf die Benutzung von a_{ij} abgestimmt werden).
Definiere eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf $\mathcal{E}$ durch $\left[(u, x) \subset U_i \times \mathbb{R}^k\right] \sim \left[(v, y) \subset U_j \times \mathbb{R}^k\right] \iff u = v \in U_i \cap U_j$ und $y = a_{ij}(u)\, x$.
Dies ist eine Äquivalenzrelation, denn

(i) Reflexivität: $(u, x) \sim (u, x) \iff u = u$ und $x = a_{ii}(u)\, x = \mathrm{Id}\, x = x$.
(ii) Symmetrie: $(u, x) \sim (v, y) \iff u = v,\ y = a_{ij}(u)\, x \iff u = v,\ x = a_{ij}(u)^{-1}\, y \iff u = v,\ x = a_{ji}(u)\, y \Longrightarrow (v, y) \sim (u, x)(u \in U_i \cap U_j)$.
(iii) Transitivität: $(u, x) \sim (v, y) \sim (w, z) \iff u = v = w$ und $y = a_{ij}(u)\, x,\ z = a_{j\ell}(u)\, y \Rightarrow z = a_{ij}(u) \circ a_{j\ell}(u)\, x = a_{i\ell}(u)\, x$.

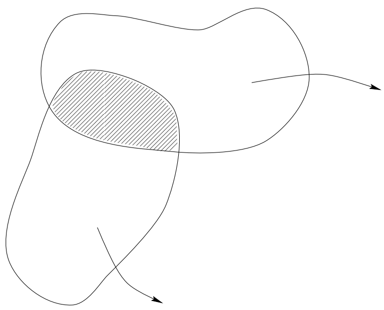
Definiere jetzt $E := \mathcal{E}/\!\sim$ mit der Quotiententopologie.
Sei $\tilde{\pi} : \mathcal{E} \to M,\ \tilde{\pi}(u, x) = u$ die Projektion auf die erste Komponente. Diese Definition ist verträglich mit $\sim$, denn ist $(u, x) \sim (v, y)$, dann ist $u = v$ und $\tilde{\pi}(u, x) = u = v = \tilde{\pi}(v, y)$. Ist also $[u, x]$ die Äquivalenzklasse von (u, x) bezüglich $\sim$, dann ist $\pi : E \to M,\ \pi[u, x] = u$ wohldefiniert, surjektiv nach Definition und stetig (wegen Quotiententopologie).
Die Einschränkung der kanonischen Projektion $p : \mathcal{E} \to \mathcal{E}/\!\sim\, = E$ auf $U_i \times \mathbb{R}^k$ ist stetig (nach Definition der Quotiententopologie) und Homöomorphismus, denn für $p_{|U_i \times \mathbb{R}^k}$ gilt: Ist $(u, x) \sim (v, y)$, so sind beide

in $U_i \times \mathbb{R}^k$ also $u = v,\ y = a_{ii}(u)x = x$. Damit ist p lokal injektiv also Homöomorphismus. Man hat also lokale „Karten“ auf E.
E hat die Struktur einer topologischen Mannigfaltigkeit mit den lokalen Trivialisierungen $\psi_i : \pi^{-1}(u_i) = p(U_i \times \mathbb{R}^k) \mapsto U_i \times \mathbb{R}^k$ die als lokale Umkehrungen von p Diffeomorphismen sind. Die Übergangsfunktionen sind gegeben durch

$$(\psi_i \circ \psi_j^{-1})(u,x) = \psi_i\big(\psi_j^{-1}(u,x)\big) = \big(u, a_{ji}(x)\big)\ .$$

Man macht damit einen Übergang zu neuen Repräsentanten innerhalb der Äquivalenzklasse, denn $(u,x) \sim \big(u, a_{ji}(x)\big)$ nach Definition.
E ist also Vektorbündel über M mit lokalen Trivialisierungen $\psi_i : \pi^{-1}(U_i) \to U_i \times \mathbb{R}^k$ und Übergangsfunktionen a_{ij}. $\square$

Beispiel 2.11. M^n sei differenzierbare Mannigfaltigkeit, $\mathcal{U} = \{U_i, i \geq 1\}$ sei Überdeckung mit Koordinatenumgebungen, das heißt es existieren differenzierbare Karten $\varphi_i(U_i) = V_i \subset \mathbb{R}^n$ auf $\mathcal{U}$.



Auf V_i, V_j kann man Tangentialräume betrachten: Man habe zu $x \in V_i \subset \mathbb{R}^n$ den Tangentialraum $T_x\mathbb{R}^n$ an x, das heißt, die Menge aller Tangenten von Kurven, die durch x gehen.
Definiere $\tilde{a}_{ij}(x) := D(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})(x)$ (das faßt man als linearen Isomorphismus auf) von $T_x\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$ auf $T_{\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}(x)}\mathbb{R}^n$ (Tangentialraum an $(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})(x) \in V_j$), also ist $\tilde{a}_{ij}(x)$ aus $GL(n)$, definiert auf $\varphi_i(U_i \cap U_j) \simeq U_i \cap U_j$. Dies definiert eine Abbildung $a_{ij} : U_i \cap U_j \to GL(n)$, die differenzierbar ist, und für die gilt

(i) $a_{ii} \equiv \mathrm{Id}$, denn $D(\varphi_i \circ \varphi_i^{-1}) = D\,\mathrm{Id} = \mathrm{Id}$
(ii) $a_{ij}(u) = a_{ji}(u)^{-1} \qquad (u \in U_i \cap U_j)$
(iii) $a_{ij}(u) \circ a_{jk}(u) = a_{ik}(u) \quad (u \in U_i \cap U_j \cap U_k)$

Das so erhaltenen Vektorbündel heißt *Tangentialbündel* an M.

Definition 2.12. Ein *(differenzierbarer) Schnitt* φ eines Vektorbündels $E \xrightarrow{\pi} M$ ist eine differenzierbare Abbildung $\varphi : M \to E$ mit

$$\pi(\varphi(p)) = p \quad \forall\, p \in M.$$

Ein differenzierbarer Schnitt $X : M \to TM$ heißt *Vektorfeld.*

Bemerkung. (i) Es gibt immer einen Schnitt, nämlich den sogenannten Nullschnitt: $\varphi(p) = \{p\} \times \vec{0}$ ($\vec{0} \in E_p\ \forall p$, da E_p Vektorraum).
(ii) Ist $\varphi : M \to E$ Schnitt, so ist $\varphi : M \to \varphi(M)$ Diffeomorphismus.
(iii) Die Menge aller Schnitte von E ist ein Vektorraum $\Gamma(E)$ durch die Beziehung (E_p ist Vektorraum):

$$\begin{aligned}(\varphi + \psi)(p) &= \varphi(p) + \psi(p)\\ (\lambda \cdot \varphi)(p) &= \lambda \cdot (\varphi(p))\end{aligned}$$

(iv) Ist $\psi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^n$ Trivialisierung, dann kann mittels ψ die Menge aller Schnitte über U mit dem Vektorraum der differenzierbaren Abbildungen $\alpha : U \to \mathbb{R}^n$ identifiziert werden. Ist mämlich $\alpha : U \to \mathbb{R}^n$ differenzierbar, dann setzt man $\varphi(p) = \big(p, \alpha(p)\big)$ Wendet man jetzt die Projektion an, dann kommt wieder p heraus, damit ist φ ein Schnitt.
Betrachtet man das Ganze global, dann muß die lokale Darstellung mit den Verklebungen verträglich sein, d.h. ist eine lokale Darstellung auf U_i durch $\alpha_i : U_i \to \mathbb{R}^n$ gegeben, dann muß gelten: $\alpha_j(U) = \underbrace{a_{ij}(U)}_{\in \mathrm{GL}(k)} \alpha_i(U)$.

Beispiel 2.13. (i) Das *triviale Bündel* $E = M \times \mathbb{R}^k$ mit der Projektion $\pi(p,x) = p$. Hier sind die Eigenschaften von bestimmten Schnitten interessant: Sei $e_1, \dots e_k$ Basis von $\mathbb{R}^k$. Man definiert jetzt Schnitte $\tilde{e}_i$ so:

$$\tilde{e}_i(p) = (p, e_i)$$

Die Schnitte $\{\tilde{e}_1(p), \dots \tilde{e}_k(p)\}$ sind globale Schnitte von E, und für jedes p ist diese Menge Basis der Faser E_p.

(ii) Sei $E \xrightarrow{\pi} M$ ein beliebiges Bündel. Nimm an, es existieren Schnitte $\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_k$ von M so, daß für jedes $p \in M$ die Menge $\{\tilde{e}_1(p), \dots \tilde{e}_k(p)\}$ Basis von E_p. Man kann E dann „wie das triviale Bündel verwenden", nämlich über folgende Definition:
Definiere $\varphi : E \to M \times \mathbb{R}^k$ so: Für $x \in E_p$ existieren eindeutige Zahlen $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}$ so, daß $x = \sum_{i=1}^n x_i \tilde{e}_i$ („Koordinaten"), setze also $\varphi(x) = \big(p, (x_1, \dots, x_k)\big)$. φ ist Diffeomorphismus, denn $\varphi|_M = \mathrm{Id}$ und $\varphi_{|E_p}$ ist linearer Isomorphismus von E_p auf $\{p\} \times \mathbb{R}^k$, der Faser des trivialen Bündels über p, also ist φ von maximalen Rang differenzierbar und Fasern werden auf Fasern abgebildet.

Definition 2.14. Ein *Morphismus* von Vektorbündeln $E \xrightarrow{\pi} M$, $F \xrightarrow{\sigma} N$ ist eine differenzierbare Abbildung $\tilde{\varphi} : E \to F$ mit folgenden Eigenschaften: Es gibt eine differenzierbare Abbildung $\varphi : M \to N$ so, daß für $p \in M$ gilt: $\tilde{\varphi}_{|E_p}$ ist lineare Abbildung von E_p in $F_{\varphi(p)}$, so daß das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\varphi} & F \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\sigma} \\ M & \xrightarrow[\varphi]{} & N \end{array}$$

$\tilde{\varphi}$ heißt *Isomorphismus*, wenn $\varphi : M \to N$ Diffeomorphismus ist und $\tilde{\varphi}_{|E_p} : E_p \to F_{\varphi(p)}$ ein linearer Isomorphismus ist für alle $p \in M$.

Bemerkung. Insbesondere ist $\tilde{\varphi}$ Diffeomorphismus.

Ein Bündel „ist" genau dann trivial, wenn man k Schnitte $\tilde{e}_j$ finden kann, die für alle p eine Basis von E_p bilden, also

Definition 2.15. Ein Vektorbündel vom Rang k, $\pi : E \to M$ heißt *trivial*, wenn es einen Diffeomorphismus $\tilde{\varphi} : E \to M \times \mathbb{R}^k$ gibt, welcher die Fasern erhält, das heißt, falls ($\tilde{\varphi} : \pi^{-1}(p) \to \{p\} \times \mathbb{R}^k$ ist Vektorraumisomorphismus ist.

Beispiel 2.16. (i) Das Tangentialbündel $T\mathbb{R}^n$ von $\mathbb{R}^n$ ist ein triviales Bündel. Wähle hierzu die Standardbasis $e_1, \dots, e_n$ von $\mathbb{R}^n$.

Für $x \in \mathbb{R}^n$ sei $\partial_i(x)$ Tangente an die Kurve $t \mapsto x + te_i$. Also

$$\partial_i(x)(f) = \frac{\partial}{\partial x_i} f(x)$$

$\partial_1, \dots, \partial_n$ sind globale Schnitte von $T\mathbb{R}^n$, die (kanonisch) die Trivialisierungen definieren. Natürlich sind die ∂_i linear unabhängig und bilden eine Basis von $T_x\mathbb{R}^n$ in jedem Punkt.

(ii) Sei $Z := \{(\cos\theta, \sin\theta, t) \mid \theta \in [0, 2\pi], t \in \mathbb{R}\}$ der Zylinder vom Radius 1.
Z ist zweidimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$ und
TZ ist trivial, denn für $x \in Z$ wähle

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= \text{Tangente in } x \text{ an die Kurve } t \mapsto x + t(0,0,1) \\ & \text{(triviale Tangente)}, \\ \varphi_2(x) &= \text{Tangente in } x \text{ an horizontalen Kreis } s \mapsto (\cos(\theta+s), \sin(\theta+s), t) \\ & \text{wenn } x = (\cos(\theta), \sin(\theta), t)\ ,\ \text{(nichttriviale Tangente).} \end{aligned}$$

$\varphi_1(x)$ und $\varphi_2(x)$ sind linear unabhängig, denn die ersten beiden Komponenten von „$\varphi_1(x)$“ sind 0, und die letzte Komponente von „$\varphi_2(x)$“ ist 0. Also bilden φ_1 und φ_2 eine Basis für TZ.

S^{2n+1} hat ebenfalls ein triviales Tangentialbündel. Wähle hierzu z.B. die Abbildung $(x_1, \dots, x_{2n+2}) \mapsto (x_2, -x_1, \dots, x_{2n+2}, -x_{2n+1})$, die die linear unabhängigen Schnitte liefert, während S^2 nicht mal einen „ordentlichen“ Schnitt hat. Das besagt ja gerade der Satz vom Igel der da lautet: Jedes stetige Vektorfeld auf S^2 hat eine Nullstelle.

(iii) Sei E ein Vektorbündel über M. Jede Faser E_p ist k–dimensionaler Vektorraum. Identifiziert man ihn mit $\mathbb{R}^k$, dann kann man zu $\mathbb{R}^k$ z.B. den Dualraum $(\mathbb{R}^k)^*$ betrachten. Frage: Ist $\{\{p\} \times (\mathbb{R}^k)^*\}$ ein Bündel? Man bildet dazu Übergangsfunktionen mittels der Adjungierten

$$a^*_{ij} : U_i \cap U_j \to GL(k, \mathbb{R})\ , \qquad a^*_{ij}(u) = (a_{ij}(u))^t$$

Das ist mir nicht verständlich

Anderes Beispiel: symmetrische bilineare Formen. Sei $S^2(\mathbb{R}^k)$ der Raum der symmetrischen Bilinearformen auf $\mathbb{R}^k$. $S^2(\mathbb{R}^k)$ ist Vektorraum durch $(\alpha A + \beta B)(x, y) = \alpha A(x, y) + \beta B(x, y)$.

Man kann $A \in S^2(\mathbb{R}^k)$ durch eine Matrixdarstellung bezüglich der Standardbasis $\{e_1, \dots, e_k\}$ von $\mathbb{R}^k$ beschreiben. $A = (a_{ij})_{ij}$ mit $a_{ij} = A(e_i, e_j)$. a_{ij} ist symmetrisch in i, j, d.h. $a_{ij} = a_{ji}$. Damit ist $S^2(\mathbb{R}^k) \cong \mathbb{R}^{k(k+1)/2}$.

Man bildet jetzt Fasern, indem man jedem $p \in M$ den $S^2(E_p) \cong S^2(\mathbb{R}^k)$ anheftet. Sei also $S^2(E)$ die Menge aller symmetrischen Bilinearformen auf Fasern von E.

Zeige: $S^2(E)$ ist ein Vekorraumbündel über M.

Man hat die kanonische Projektion definiert durch $\tilde{\pi} : S^2(E) \to M$, $\tilde{\pi}^{-1}(x) = S^2(E_x)$.

Lokale Trivialisierungen: Sei $\mathcal{U} = \{U_i \mid i \geq 1\}$ Überdeckung von M, so daß $\psi_i : \pi^{-1}(U_i) \to U_i \times \mathbb{R}^k$ Trivialisierung von E über U_i ist.

Man braucht jetzt noch Überdeckungsfunktionen ω_{ij}, die Basen in Basen abbilden. Die symmetrischen Bilinearformen in $\mathbb{R}^k$ haben die Basiselemente $B_{mj}(e_k, e_\ell) = \delta_{mk} \cdot \delta_{j\ell} + \delta_{m\ell} \cdot \delta_{jk}$,

$$B_{ij} = \begin{pmatrix} & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & \end{pmatrix}$$

Nun erhält man eine Identifikation $\tilde{\pi}^{-1}(U_i) = U_i \times \mathbb{R}^{k(k+1)/2}$ derart, daß der Punkt $(u, B_{mj}) \in U_i \times \mathbb{R}^{k(k+1)/2}$ der symmetrischen Bilinearform $(v, w) \in E_u \to B_{mj}\left(\bar{\psi}_i(v), \bar{\psi}_i(w)\right)$ zugeordnet wird, wobei $\psi_i = (\pi, \bar{\psi}_i)$ auf U_i. Die Klebefunktionen ω_{ij} bzgl. der Trivialisierungen ψ_i, d.h. $\left(u, \omega_{ij}(u)\, e\right) = \bar{\psi}_j \circ \bar{\psi}_i^{-1}(u, e)$ für $(u, e) \in (U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^k$ sollen für $u \in U_i \cap U_j$ den Basiswechsel in $\mathbb{R}^k$ beschreiben. Man erhält eine neue Beschreibung derselben Bilinearform. Ist B die Beschreibung einer Bilinearform bezüglich der Standardbasis, so ist $A = {}^t\left(\omega_{ij}(u)^{-1}\right) B \left(\omega_{ij}(u)^{-1}\right)$ die Beschreibung in der neuen Basis, welche da lautet $\omega_{ij}(u) \circ$ Standardbasis.

Man erhält also Übergangsfunktionen

$$\Omega_{ij}(u)\, B = {}^t\left(\omega_{ij}(u)^{-1}\right) B\, \omega_{ij}(u)^{-1} \ ,$$

das ist ein linearer Isomorphismus, der differenzierbar von u abhängt (Komposition linearer Automorphismen). Daraus folgt, alle Forderungen an die Übergangsfunktionen sind erfüllt, was heißt $S^2(E)$ ist ein Vektorraumbündel über M mit Trivialisierungen über U_i.

Definition 2.17. Eine *Riemannsche Metrik* auf $E \xrightarrow{\pi} M$ ist ein glatter Schnitt g von $S^2(E)$, so daß für $x \in M$ die Form $g(x) = g_x$ positiv definit ist.

Man hat eine differenzierbare Zuordnung, die jedem Punkt aus M eine symmetrische, positiv definite Bilinearform S zuordnet. Eine Riemannsche Metrik auf einer Mannigfaltigkeit ist eine Familie von Skalarprodukten, welche auf jedem Tangentialraum definiert sind und glatt von $p \in M$ abhängen.
Eine Riemannsche Metrik auf TM heißt *Riemannsche Metrik auf M*, Bezeichnung: (M, g) heißt dann *Riemannsche Mannigfaltigkeit.*

Bemerkung. ???? Sind X, Y differenzierbare Schnitte von E, dann ist $x \mapsto g_x(X, Y)$ differenzierbar: Man ersetzt $U \subset \mathbb{R}^k$ kanonisch durch eine Abbildung $U \to S^2(\mathbb{R}^k)$: $u \mapsto$ Matrix von g_u bezüglich der Standardbasis. Das ist eine differenzierbare Abbildung $U \to S^2(\mathbb{R}^k)$.
In der Matrix stehen die Auswertungen der Übergangsfunktionen a_{ij} bezüglich der Standardvektoren.

$$u \mapsto \begin{pmatrix} a_{11}(u) & \cdots & a_{1n}(u) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(u) & \cdots & a_{nn}(u) \end{pmatrix}$$

Da die $a_{ij}(u)$ differenzierbar von u abhängen, hängt auch diese Abbildung differenzierbar von u ab.

Beispiel 2.18. Sei g Riemannsche Metrik auf $\mathbb{R}^n$. $T\mathbb{R}^n$ ist ja trivial mit $\partial_1, \ldots, \partial_n$ als Basis. Setze $g_{ij}(x) = g_x\ (\partial_i(x), \partial_j(x))$. $x \mapsto \left(g_{ij}(x)\right)_{ij}$ ist eine differenzierbare Abbildung in den Raum der symmetrischen, positiv definiten Matrizen, die im übrigen eine offene Teilmenge von $S^2(\mathbb{R}^n)$ bilden. Differenzierbarkeit der Abbildung $x \to \left(g_{ij}(x)\right)_{ij}$ ist gleichwertig mit der Differnezierbarkeit der Abbildung $x \mapsto g_{ij}(x)$ für alle i, j.

RotationsflächenIst hier eher unmotiviert
Diese Flächen sind 2–dimensionale Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^3$. Hat man $\psi : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, ψ sei von maximalem Rang auf U differenzierbar . Für $u \in U$ ist $\mathrm{D}\psi(T_u\mathbb{R}^2) \subset T_{\psi(u)}\mathbb{R}^3$ 2–dimensionaler Unterraum des Tangentialraumes von $\mathbb{R}^3$ in $\psi(u)$.
Seien X, Y Vektorfelder auf U, dann ist die Abbildung $(X, Y) \mapsto \langle \mathrm{D}\psi(X), \mathrm{D}\psi(Y)\rangle$ eine differenzierbare Funktion und definiert eine Riemannsche Metrik auf $\psi(U)$.

Beispiel 2.19. Sei $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$ die Ebene aller Punkte $\{(x, y, 0) \,|\, x, y \in \mathbb{R}\}$. Sei $c : I \to \mathbb{R}^2$ eine reguläre Kurve, also $c'(t) \neq 0$, ohne Selbstüberschneidung, die die x-Achse (Rotationsachse) $\{(x, 0, 0) \,|\, x \in \mathbb{R}\}$ nicht schneidet. Sei S die Fläche, die durch Rotation von c um die x-Achse entsteht. Wenn $c(t) = (c_1(t), c_2(t), 0)$ mit $c_2(t) > 0$, dann definiere

$$\psi : I \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3 \quad : \quad \psi(t, \theta) = (c_1(t), \cos(\theta)c_2(t), \sin(\theta)c_2(t))$$

(Die x–Komponente bleibt gleich, die anderen beiden parametrisieren die Kreislinie mit Radius $c_2(t)$.)
S kann auch als diffeomorphes Bild eines Zylinders geschrieben werden: $I \times S^1$ = Zylinder, definiere

$$\psi(t, e^{i\theta}) = \big(c_1(t), \cos\theta\, c_2(t), \sin\theta\, c_2(t)\big) \ .$$

Das ist ein Diffeomorphismus:

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}\psi\left(\tfrac{\partial}{\partial t}\right) &= \mathrm{D}\psi\left(\tfrac{d}{dt}\big[(x_1, x_2)\big] + [t, 0]\right) = \tfrac{\partial}{\partial t}\psi(t, \theta) \\
&= \big(c_1'(t), \cos\theta c_2'(t), \sin\theta c_2'(t)\big) \\
\mathrm{D}\psi\left(\tfrac{\partial}{\partial \theta}\right) &= (0, -\sin\theta\, c_2(t), \cos\theta\, c_2(t))
\end{aligned}$$

c ist regulär, also $\mathrm{D}\psi(\frac{\partial}{\partial t}) \neq 0$, und $c_2 > 0\ \forall t \Longrightarrow \mathrm{D}\psi(\frac{\partial}{\partial \theta}) \neq 0$. Da $\big\langle \mathrm{D}\psi(\frac{\partial}{\partial t}), \mathrm{D}\psi(\frac{\partial}{\partial \theta})\big\rangle = 0$ gilt, spannen $\mathrm{D}\frac{\partial}{\partial t}, \mathrm{D}\frac{\partial}{\partial \theta}$ den Tangentialraum von S auf.
S heißt *Rotationsfläche* mit Achse $\{(t, 0, 0) \,|\, t \in \mathbb{R}\}$.
Zur Geometrie der Fläche: Nimm an, c ist nach der Bogenlänge parametrisiert, also $\|\mathrm{grad}\, c\| = 1$.
Man erhält eine Riemannsche Metrik g auf dem Zylinder $I \times S^1$ durch

$$g_p(X, Y) = \langle \mathrm{D}\psi(X), \mathrm{D}\psi(Y)\rangle_p$$

wobei $X, Y \in T_p(I \times S^1)$. Weil $\mathrm{D}\psi_p$ maximalen Rang hat für alle p, beschreibt dies ein Skalarprodukt; außerdem ist die Abbildung differenzierbar, also eine Riemannsche Metrik auf $I \times S^1$.
Man kann an der Metrik ablesen, wie die Rotationsfläche aussieht: Schreibe

$$g_{11}(p) = g_p\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t}\right) = \left\langle D\psi\frac{\partial}{\partial t}, D\psi\frac{\partial}{\partial t}\right\rangle = 1$$

unabhängig von p, weil c nach der Bogenlänge parametrisiert war. (Allgemein: $g_{11}(p) = \left\|\mathrm{grad}_p\, c\right\|^2$.)

$$\begin{aligned}
g_{11}(p) &= \left(\mathrm{D}\psi\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), \mathrm{D}\psi\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\right) = \left(c_1'(t)\right)^2 + \left(c_2'(t)\right)^2 = 1 \\
g_{22}(p) &= \left(\mathrm{D}\psi\left(\frac{\partial}{\partial \theta}\right), \mathrm{D}\psi\left(\frac{\partial}{\partial \theta}\right)\right) = (c_2(t))^2 = r_t^2 \\
g_{12}(p) &= g_{21}(p) = \left(\mathrm{D}\psi\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), \mathrm{D}\psi\left(\frac{\partial}{\partial \theta}\right)\right) = 0.
\end{aligned}$$

Die *Meridiane* auf einer Rotationsfläche sind Kurven der Form

$$t \mapsto \psi(t, \theta) \quad (\theta \text{ fest}).$$

Die *Breitenkreise* sind Kurven der Form

$$\theta \mapsto \psi(t,\theta) \quad (t \text{ fest}).$$

Definition 2.20. Seien $(M,g),(N,h)$ Riemannsche Mannigfaltigkeiten. Eine *Isometrie* $\varphi : (M,g) \to (N,h)$ ist ein Diffeomorphismus so, daß die *zurückgeholte Metrik* $\varphi^* h$ mit g übereinstimmt, d.h. wenn für $X, Y \in T_m M$ gilt

$$\varphi^* h(X,Y) := h_{\varphi(m)}(\mathrm{D}\varphi_m X, \mathrm{D}\varphi_m Y) = g_m(X,Y).$$

Die Mannigfaltigkeiten M, N heißen dann *isometrisch*.

Eine Rotationsfläche hat Isometrien, nämlich die Rotationen um die Drehachse (hier ist $M = N$). Die Riemannsche Metrik ist das euklidische Skalarprodukt im $\mathbb{R}^3$, eingeschränkt auf den Tangentialraum.

Beispiel 2.21. (i) Sei $A \in O(n)$ lineare orthogonale Abbildung. Da $\mathrm{D}A = A$ gilt (A linear) und weil A das euklidische Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ erhält, folgt A ist Isometrie der Riemannschen Mannigfaltigkeit $(\mathbb{R}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle)$.

(ii) Translation T_y um den Vektor y. $T_y(x) := x + y$ ist Isometrie für alle y. (Identität erhält euklidisches Skalarprodukt).

Bemerkung. (i) $\varphi : (M,g) \to (N,h)$ Isometrie $\Longleftrightarrow \varphi^{-1} : (N,h) \to (M,g)$ Isometrie, denn

$$\begin{aligned} h(\mathrm{D}\varphi X, \mathrm{D}\varphi Y) &= g(X,Y) = g\big(\mathrm{D}(\varphi^{-1}\circ\varphi)X, \mathrm{D}(\varphi^{-1}\circ\varphi)Y\big) \\ &= g\big(\mathrm{D}\varphi^{-1}(\mathrm{D}\varphi(X)), \mathrm{D}\varphi^{-1}(\mathrm{D}\varphi(Y))\big) \end{aligned}$$

Da $\mathrm{D}\varphi(X)$, $\mathrm{D}\varphi(Y)$ beliebig sind, ($\mathrm{D}\varphi$ hat maximalen Rang), ist auch φ^{-1} Isometrie.

(ii) $\varphi : (M,g) \to (N,h)$ Isometrie, $\Psi : (N,h) \to (O,k)$ Isometrie $\Longrightarrow (\Psi\circ\varphi)(M,g) \to (O,k)$ Isometrie (Kettenregel).

(iii) Aus i) und ii) folgt, daß die Isometrien von (M,g) auf sich eine Gruppe $\mathrm{Iso}(M,g)$ bilden. Diese Gruppe ist Untergruppe der Gruppe der Diffeomorphismen $\mathrm{Diffeom}(M)$ auf (M,g).

Erinnerung: (M,g) sei Riemannsche Mannigfaltigkeit, $c : I \to (M,g)$ eine differenzierbare Kurve. Wir definieren:

$$\ell(c) = \int_0^1 \big\{g_{c(t)}\big(c'(t), c'(t)\big)\big\}^{1/2}\, dt \ .$$

Die Länge der Kurve hängt – wie im euklidischen Raum - nicht von der Parametrisierung ab:

Lemma 2.22. *Ein Diffeomorphismus $\varphi : (M,g) \to (N,h)$ ist genau dann eine Isometrie, wenn für jede Kurve c gilt:*

$$\ell(\varphi(c)) = \ell(c).$$

Beweis. $\Rightarrow$ ist klar, denn $(\varphi\circ c)'(t) = \mathrm{D}\varphi\big(c(t)\big)\, c'(t)$. Nach Definition von Länge und Isometrie ist man dann auch schon fertig.

$\Leftarrow$ Nimm an, φ erhält die Kurvenlänge. Nimm weiter an, φ erhielte *nicht* die Norm: Es gebe also $p \in M, X \in T_p M$ so, daß z.B. $h\big(\mathrm{D}\varphi(X), \mathrm{D}\varphi(X)\big) < g_p(X,X)$ gilt. Wähle eine Kurve $c : (-\epsilon,\epsilon) \to M$ mit $c(0) = p, c'(0) = X$. Wähle dabei ϵ klein genug, so daß $g_{c(t)}\big(c'(t), c'(t)\big) > h\big(\mathrm{D}\varphi(X), \mathrm{D}\varphi(X)\big)\ \forall t$;

so eine Umgebung kann man immer finden. Also ist

$$\begin{aligned} \ell(c) &= \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \{g_{c(t)}(c'(t), c'(t))\}^{1/2}\, dt \\ &> \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \{h((\varphi\circ c)'(t), (\varphi\circ c)'(t))\}^{1/2}\, dt = \ell(\varphi\circ c) \end{aligned}$$

Das ist ein Widerspruch zu der Annahme, daß die Kurvenlänge unter φ erhalten bleibt. Damit hat man für φ bereits:

- φ ist ein Diffeomorphismus (nach Voraussetzung)
- $\mathrm{D}\varphi$ ist linear und erhält die Quadratnorm von Vektoren.

Wegen der Polarisierungsformel

$$\langle x, y\rangle = \tfrac{1}{2}(\|x-y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2)$$

erhält $\mathrm{D}\varphi$ auch das Skalarprodukt. Daher ist φ Isometrie.

$\square$

Beispiel 2.23. Die *Bewegungsgruppe* von $\mathbb{R}^n$ ist die Gruppe aller Abbildungen φ der Form $\varphi = A\circ T_y$, mit $A \in O(n)$ und T_y Translation um den Vektor $y \in \mathbb{R}^n$. Das ist eine Gruppe, denn ist $\varphi_1 = A_1\circ T_{y_1}, \varphi_2 = A_2\circ T_{y_2}$, dann ergibt sich

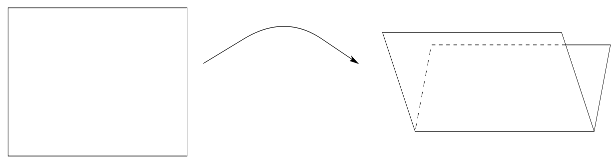
$$\begin{aligned} \varphi_1\circ\varphi_2(x) &= (A_1\circ T_{y_1})(A_2(x+y_2)) \\ &= A_1(A_2(x)) + A_1(A_2(y_2)+y_1) \\ &= A_1\circ A_2(x + y_2 + A_2^{-1}(y_1)) \\ &= \underbrace{A_1\circ A_2}_{\in O_n}\circ T_{A_2^{-1}(y_1)+y_2}(x) \end{aligned}$$

Die Bewegungsgruppe ist in der Isometriegruppe von $(\mathbb{R}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ enthalten (siehe Beispiel 2.21).
Behauptung: Die Isometriegruppe $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ist identisch der Bewegungsgruppe.
Sei also φ Isometrie. Setze $\psi := T_{-\varphi(0)}\circ\varphi$, dann ist ψ eine Isometrie mit $\psi(0) = 0$ („Normalität“). Zeige: ψ ist linear. (Dann kann man $T_{-\varphi(0)}$ auf die andere Seite bringen und hat die Darstellung für φ gefunden).
ψ ist Diffeomorphismus, und $\mathrm{D}\psi_{|p} \in O(n)$. Jede Kurve der Länge ℓ von 0 nach x wird unter ψ auf eine Kurve der Länge ℓ von 0 nach $\psi(x)$ abgebildet (ψ erhält die Länge, weil φ die Länge erhält und $\psi(0) = 0$). $S(r) := \{x \in \mathbb{R}^n | \, \|x\| = r\}$ ist die Menge aller Punkte die mit 0 durch eine Kurve der Länge r verbunden werden können, aber mit keiner kürzeren Kurve. Verbindet man 0 und x durch eine Strecke, dann hat diese Strecke die Länge r. Bis auf Umparametrisierung ist sie also die eindeutig bestimmte Kurve kürzester Länge von 0 nach x, $\psi(S(r)) = S(r)$, weiter bildet ψ Halbgeraden in Halbgeraden ab. Genauso gehen unter $\mathrm{D}\psi$ Tangenten in Tangenten über: ψ bildet $\{tx | t \geq 0\}$ auf $\{t\, \underbrace{\mathrm{D}\psi(0)}_{\in O(n)}\, x | t \geq 0\}$ ab. Weiter gilt

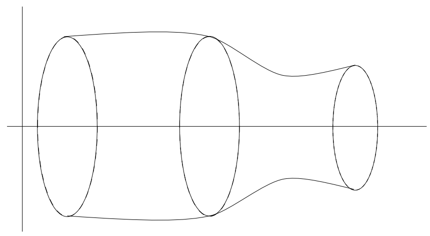
$$\|\psi(rx)\| = \|r\cdot\mathrm{D}\psi(0)\, x\| \quad \text{für } r \geq 0\ ,$$

und identifiziert man $T\mathbb{R}^n$ mit $\mathbb{R}^n$ und somit ψ mit $\mathrm{D}\psi(0)$, dann folgt die Linearität von ψ.

Vorsicht: Man hatte die Isometrie so definiert: φ sei *Diffeomorphismus*, der das Skalarprodukt auf $T\mathbb{R}^n$ erhält und Längen von Kurven fest läßt.
Wenn man auf die Forderung Diffeomorphismus verzichtet, geht's schief: Diese Abbildung erhält Längen von Kurven, aber sie ist nicht differenzierbar. Das Bild ist keine Untermannigfaltigkeit!



Beispiel 2.24. (a) Sei $c(t) = \big(c_1(t), c_2(t), 0\big) \subset \mathbb{R}^3,\ c_2(t) > 0\ \forall t$. Für $\theta \in [0, 2\pi]$ setze $A(\theta) \in SO(3)$, genauer: die Rotation um die $(1,0,0)$–Achse um den Winkel θ. $\theta \mapsto A(\theta)$ ist Homomorphismus von der Kreisgruppe (Gruppe der komplexen Zahlen mit $\|z\| = 1$) in die $SO(3)$. Die Rotationsfläche ist Bild von c unter dieser Kreisgruppe. Man hat die Parametrisierung

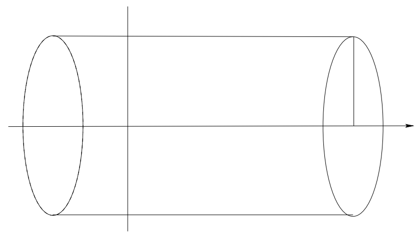


$$\psi(t,\theta) = \big(c_1(t), c_2(t)\,\cos\theta, c_2(t)\,\sin\theta\big)\ .$$

Zu jedem festen t gibt es Isometrien der Rotationsfläche S auf sich, nämlich genau die $SO(2)$, die folgendermaßen abbildet:

$$\psi(t,\theta_1) \mapsto \psi(t,\theta_2)\ .$$

(b) Sei Z der Zylinder, der von $c(t) = (t, r, 0), r \in \mathbb{R}$ erzeugt wird. Translation mit $(R, 0, 0), R \in \mathbb{R}$,



operiert auf Z als Gruppe von Isometrien, d.h. man kann jeden Punkt des Zylinders mittels Isometrie in jeden anderen überführen: zu beliebigem $x, y \in Z$ gibt es eine Isometrie φ mit $\varphi(x) = y$.

Wähle die Standardparametrisierung ψ. Diese liefert eine Riemannsche Metrik auf $\mathbb{R}\times S^1$, nämlich die Standardmetrik:

$$\begin{aligned}
g_{11} &= \left\langle \mathrm{D}\psi\left(\tfrac{\partial}{\partial t}\right), \mathrm{D}\psi\left(\tfrac{\partial}{\partial t}\right)\right\rangle = 1 \\
&\ \text{(c nach der Bogenlänge parametrisiert)} \\
g_{12} &= g_{21} = 0 \\
g_{22} &= \left\langle \mathrm{D}\psi\left(\tfrac{\partial}{\partial \theta}\right), \mathrm{D}\psi\left(\tfrac{\partial}{\partial \theta}\right)\right\rangle = 1
\end{aligned}$$

Die induzierte Metrik ist also einfach die euklidische Metrik auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$!

Definition 2.25. Sei G eine Gruppe und M eine Mannigfaltigkeit. G operiert auf M als *Transformationsgruppe [differenzierbar, bzw. als Gruppe von Isometrien]*, falls es einen Homomorphismus $\rho : G \to$ Homöo(M) [Diffeo(M) bzw. Iso(M)] von G in die Gruppe der Homöomorphismen [Diffeomorphismen bzw. Isometrien] von M gibt. Der Homomorphismus ρ ist wie folgt beschrieben: Für $g \in G$ ist $\rho(g) \in \mathrm{Diffeo}(M)$, d.h. $xg \in M$, wobei $xg := \rho(g)(x)$ und $x(gh) = (xg)h$. Für $x \in M$ ist der *G-Orbit* von x die Menge $\{xg \,|\, g \in G\}$.

G operiert *eigentlich diskontinuierlich*, wenn gilt

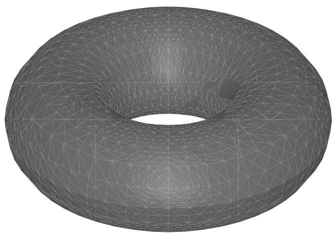
(i) Wenn $y \notin \{xg \,|\, g \in G\}$, dann existieren Umgebungen U von x, V von y mit $Ug \cap V = \emptyset$ für alle $g \in G$.
(ii) Für $x \in M$ ist die *Isotropiegruppe* $G_x = \{g \in G \,|\, xg = x\}$ endlich
(iii) $x \in M$ hat Umgebung U mit $Ug = U$ für jedes $g \in G_x$ und $U \cap Ug = \emptyset$ für $g \in G - G_x$.

G operiert *frei*, falls $G_x = \{\mathrm{Id}\}$ für alle $x \in M$.

Bemerkung. zu i): Die Bilder von x unter G sind *diskret* (vgl. Translation auf dem Torus).
zu ii): Man läßt auch Punkte zu, die unter manchen g fest bleiben, nur sollen es endlich viele g sein, sonst bekäme man mit i) Probleme. Das sieht dann so aus wie $z \mapsto z^k$: ist $k \neq 0$, so operiert die Gruppe $(\mathbb{Z}, +)$ ordentlich, in 0 hat man Fixpunkte. iii) beschreibt, wie die Umgebung dann aussieht, die Umgebung U bleibt unter isotropen Elementen fest, unter anderen g's wird sie auf eine disjunkte Menge abgebildet. Die Isotropiegruppe enthält *immer* die Identität ($\varphi^0(x) = x$). Enthält sie keine anderen Elemente, so „operiert die Gruppe frei“, man hat also für alle anderen Gruppenelemente keine Fixpunkte.

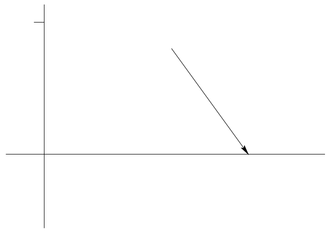
Definition 2.26. (i) Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. $\mathrm{Iso}(M, g)$ operiert *transitiv*, falls zu $x, y \in (M, g)$ ein $\varphi \in \mathrm{Iso}(M, g)$ existiert mit $\varphi(x) = y$.
(ii) Eine *lokale Isometrie* ist eine Isometrie von $U \subset (M, g)$ offen auf eine offene Teilmenge V von (N, h).
(iii) Lokale Isometrien von (M, g) operieren transitiv, falls es zu $p, q \in M$ Umgebungen U_p, V_q gibt und eine (lokale) Isometrie $U_p \to V_q$.
(iv) Eine *einparametrige Gruppe von Diffeomorphismen [oder Isometrien]* ist ein Homomorphismus $\psi : (\mathbb{R}, +) \to \mathrm{Diffeom}(M)$ $[\mathrm{Iso}(M, g)]$ so, daß für alle $x \in M$ die Abbildung $t \mapsto x\,\psi(t)$ stetig ist.

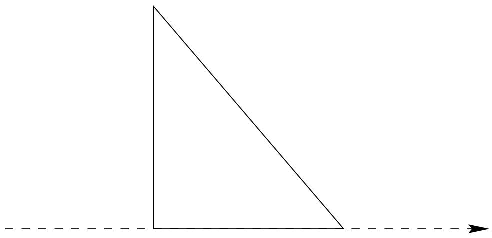
Beispiel 2.27. (i) Sei $r > 0, a > r, c(t) = (r \sin t, r \cos t + a, 0)$ ein Kreis vom Radius r um $(0, a, 0)$. Die Rotationsfläche, die durch Rotation des Kreises um die x-Achse entsteht, ist ein *Rotationstorus*. Meridiane und Breitenkreise sind Kreise (diffeomorph zu $S^1 \times S^1$).



Meridian = Kreis vom Radius r
Breitenkreise haben Radien in $[a - r, a + r]$

(ii) Sei $p = (p_1, p_2), p_2 < 1$. Dann gibt es genau einen nach rechts zeigenden Vektor y mit $||y|| = 1$ und der Eigenschaft, daß y angehängt an p auf der x–Achse endet: Wähle also p mit $p_1 > 0, p_2 \in (0, 1)$. Nenne y lieber X_p. Man kann ausrechnen: $(p_1, p_2) + X(p_1, p_2) = (p_3, 0)$, $p_3 > p_1$, also $p_3 = p_1 + r, r > 0$. Das heißt $p_2^2 + r^2 = 1, r = \sqrt{1 - p_2^2}$, woraus folgt $X(p_1, p_2) = (\sqrt{1 - p_2^2}, -p_2)$. Das definiert ein Vektorfeld der Länge 1 in diesem Streifen.





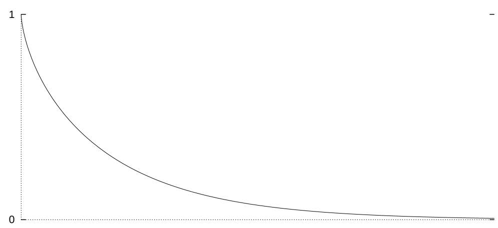
Suche jetzt eine Kurve $c(t)$ mit $c'(t) = X\big(c(t)\big)$. Das geht wegen der allgemeinen Lösbarkeitsbedingung für Differentialgleichungen. X ist invariant unter Translationen $\{T^t \,|\, T^t(y) = y + (t,0)\}$. Man kann c auf dem Rand des Streifens fortsetzen: wähle c so, daß $c(0) = (0,1), c(t) = \big(c_1(t), c_2(t)\big)$ und weiter gilt

(a) $c_2'(t) = -c_2(t)$ (aus der Differentialgleichung) also $c_2(t) = e^{-t}$.

(b) Da c nach der Bogenlänge parametrisiert ist ($|c'(t)| = |X_{c(t)}| = 1$), gilt

$$\begin{aligned} c'(t) &= (\sqrt{1-e^{-2t}}, -e^{-t}) \ , \text{ also} \\ c(t) &= \left(\int_0^1 \sqrt{1-e^{-2s}}\, ds, e^{-t}\right) . \end{aligned}$$

Diese so erhaltene Kurve nennt man *Traktrix*.



Diese Kurve rotiert man jetzt:

Rotation der Traktrix um die x–Achse liefert die *Pseudosphäre*.

Sie hat eine transitive Gruppe lokaler Isometrien (die Breitenkreise werden mit konstanter Geschwindigkeit kleiner), aber keine transitive Gruppe globaler Isometrien.

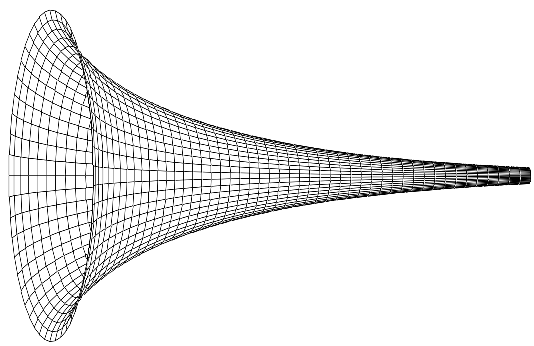
Man parametrisiert so:

$$\psi(t,\theta) = \left(\int_0^t \sqrt{1-e^{-2s}}\, ds, e^{-t}\ \cos\theta, e^{-t}\ \sin\theta\right) \ .$$

Suche die lokale Isometrie von $x \to y$:

Für $r > 0$ setze

$$\varphi\big(\psi(t,\theta)\big) = \psi(t + r, e^r\theta)$$



(man schiebt um r nach rechts und durchläuft den Breitenkreis e^r–mal so schnell.) Das ist eine Lokalisometrie der Pseudosphäre:

$$\mathrm{D}\varphi\big(\mathrm{D}\psi(\tfrac{\partial}{\partial t})\big) = \mathrm{D}\psi(\tfrac{\partial}{\partial t})\ .$$

Für festes $t > 0$ ist das Bild des Kreises $\{\theta \mapsto \psi(t,\theta)\}$ vom Radius e^{-t}, parametrisiert auf $[0, 2\pi]$ unter φ der Kreis $\{\theta \mapsto \psi(t + r, \theta)\}$ vom Radius $e^{-t} \cdot e^{-r}$, parametrisiert auf $[0, e^{-r}2\pi]$. Die Metrik bleibt in diesen Koordinaten konstant, das heißt φ ist lokale Isometrie, woraus folgt, daß die Pseudosphäre eine transitive Gruppe lokaler Isometrien besitzt.

Es gibt keine globale transitive Isometriegruppe, denn mit $t \to \infty$ strebt die Kurve gegen 0.

Beispiel 2.28. Sei $Z = \big\{(t, \cos\theta, \sin\theta), t \in \mathbb{R}, \theta \in [0, 2\pi]\big\}$ ein Zylinder. Sei φ eine Isometrie der Form $\varphi(z) = z + (1, 0, 0)$, also eine Translation. Definiere auf Z eine Äquivalenzrelation durch $x \sim y \iff \exists k \in \mathbb{Z} : \varphi^k(x) = y$. Setze $T^2 = Z/\!\sim$. Das ist ein Torus mit einer wohldefinierten vererbten Metrik. Sei $\pi : Z \to Z/\!\sim$ die Projektion auf den Torus. Dann definiere für $X, Y \in T_zZ$

$$g\big(\mathrm{D}\pi(X), \mathrm{D}\pi(Y)\big) = \langle X, Y\rangle$$

(Dazu braucht man natürlich, daß π ein Diffeomorphismus ist.) Diese Definition hängt nicht von X, Y, sondern nur von den Bildern von X und Y unter $\mathrm{D}\pi$ ab, denn φ ist Isometrie. Man erhält eine Metrik auf T^2, die lokal isometrisch zu $\mathbb{R}^2$ ist.

Die Menge {Bilder unter φ^k eines Punktes z} heißt *Orbit* von z unter f. Translationen auf dem Zylinder haben diskrete Orbiten. Geeignete offene Mengen im Zylinder, die jeden Orbit von z nur in höchstens einem Punkt treffen können also homöomorph auf den Quotientenraum $Z/\!\sim$ abgebildet werden; man erhält so eine differenzierbare Struktur auf dem Torus.

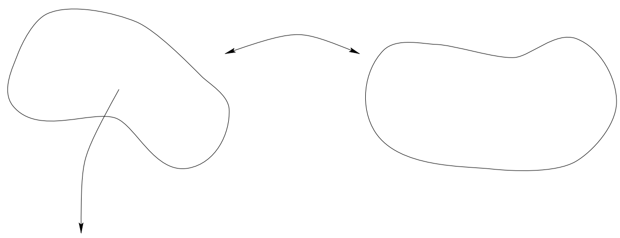
Ist M Mannigfaltigkeit und $\psi : M \to M$ ein Diffeomorphismus, dann definiert ψ eine *Aktion* auf M (von $\mathbb{Z}$) und zwar operiert die Gruppe $\{\psi^k \,|\, k \in \mathbb{Z}\}$ als Transformationsgruppe auf M durch $k \in \mathbb{Z} \mapsto \psi^k$.

Definition 2.29. Seien M und $\tilde{M}$ zwei Mannigfaltigkeiten. Die Abbildung $p : \tilde{M} \to M$ heißt *Überlagerung*, falls gilt

(i) p ist glatt und surjektiv
(ii) für jedes $m \in M$ gibt es eine Umgebung $U \subset M$ von m mit $p^{-1}(U) = \mathring{\bigcup}_{i\in I} U_i$ wobei die U_i disjunkte offene Teilmengen von $\tilde{M}$ sind, so daß für $i \in I, p : U_i \to U$ ein Diffeomorphismus ist.

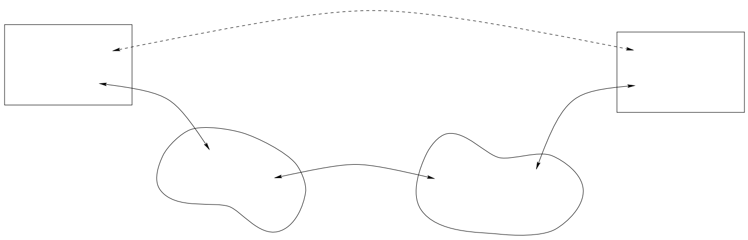
Satz 2.30. *G sei eigentlich diskontinuierliche Gruppe von Diffeomorphismen von M, die frei operiert. Dann hat der Quotientenraum M/G (identifiziere Punkte, die im selben Orbit liegen) die Struktur einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit, so daß die kanonische Projektion $\pi : M \to M/G$ eine differenzierbare Überlagerung ist. (Das heißt, π ist stetig, offen und diskret; letzteres bedeutet, daß es zu $x \in M/G$ eine Umgebung U von $\pi^{-1}(x)$ gibt, so daß kein weiterer Punkt auf x abgebildet wird). $x \in M/G$ hat eine Umgebung U mit $\pi^{-1}(U) = \mathring{\bigcup}_{\alpha\in A} U_\alpha$, und $\pi_{|U_\alpha} : U_\alpha \to U$ ist ein Diffeomorphismus.*

Beweis. Zu $x \in M$ gibt es (nach Definition von „eigentlich diskontinuierlich“ und „frei“) eine Umgebung U mit $Ug \cap U = \emptyset\ \forall g \in G,\ g \neq e$. $M/G = M/\sim$ mit $x \sim y \iff y \in \mathrm{Orb}_G(x)$. Das bedeutet, daß $\pi_U = \pi_{|U} : U \to M/G$ Homöomorphismus von U auf eine offene Menge $\pi(U) \subset M/G$ ist. Man konstruiert die Karten so:



$$(*) \qquad \pi^{-1}\big(\pi(U)\big) = \mathring{\bigcup}_{g\in G} Ug \ ,$$

das ist eine disjunkte Vereinigung, d.h. die disjunkten Mengen Ug werden homöomorph abgebildet.
Wähle eine Karte $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ auf U wie oben. Dann ist $\varphi \circ \pi_U^{-1}$ ein Homöomorphismus von $\pi(U) \subset M/G$ in $\mathbb{R}^n$. Problem bleibt der Kartenwechsel. Ist $g \in G, \psi : Ug \to \mathbb{R}^n$ ebenfalls Karte, dann ist der Kartenwechsel auf M/G von $\psi \circ \pi_{Ug}^{-1}$ zu $\varphi \circ \pi_U^{-1}$ gegeben durch



$$(\varphi \circ \pi_U^{-1}) \circ g \circ (\psi \circ \pi_{U_g}^{-1})^{-1} \ ,$$

und φ, g und ψ sind Diffeomorphismen, also ist das Ganze differenzierbar.
Aus $(*)$ weiß man, daß π lokaler Diffeomorphismus und (unbegrenzte) unverzweigte Überlagerung ist. $\square$

Definition 2.31. Seien (M, g) und (N, h) zwei Riemannsche Mannigfaltigkeiten. Eine Abbildung $p : N \to M$ ist eine *Riemannsche Überlagerung*, falls gilt:

(i) p ist eine glatte Überlagerung
(ii) p ist eine lokale Isometrie

Bemerkung. Seien $(M, g), (N, h)$ Riemannsche Mannigfaltigkeiten. Eine Riemannsche Überlagerung ist eine unverzweigte, unbegrenzte Überlagerung, d.h. zu $x \in N$ existiert Umgebung U mit $\pi^{-1}(U) = \mathring{\bigcup}_{\alpha\in A} U_\alpha, \pi_{|U_\alpha}$ ist Diffeomorphismus und $\pi : (M, g) \to (N, h)$ so, daß gilt $\pi^* h(X, Y) = g(X, Y) = h(\mathrm{D}\pi(X), \mathrm{D}\pi(Y))$), das heißt die Metrik von M wird auf die Metrik von N abgebildet.

Satz 2.32. *Ist G eigentlich diskontinuierliche Gruppe von Isometrien auf (M,g), die frei operiert, dann existiert eine Riemannsche Metrik h auf M/G, so daß $\pi : (M,g) \to (M/G,h)$ Riemannsche Überlagerung ist.*

Beweis. Für $p \in M/G$, $X, Y \in T_p(M/G)$ wähle $q \in M$ so daß $\pi(q) = p$ ist, und außerdem $\tilde{X}, \tilde{Y} \in T_q M$ mit $\mathrm{D}\pi(\tilde{X}) = X$, $\mathrm{D}\pi(\tilde{Y}) = Y$. Diese sind eindeutig bestimmt.
Definiere $h(X,Y) = g(\tilde{X},\tilde{Y})$. Das ist wohldefiniert, also von der Wahl des Urbildes unabhängig, weil G Gruppe von Isometrien ist. Ist also z ein anderer Punkt mit $\pi(z) = p$, dann gibt es $\chi \in G$ mit $q\chi = z$ (Überlagerung), und für $\bar{X} = \mathrm{D}\chi(\tilde{X}), \bar{Y} = \mathrm{D}\chi(\tilde{Y})$ gilt, daß $\mathrm{D}\pi(\bar{X}) = X, \mathrm{D}\pi(\bar{Y}) = Y$, und $g(\bar{X},\bar{Y}) = g(\tilde{X},\tilde{Y})$, da χ Isometrie ist. $\square$

Beispiel 2.33. (i) Sei $\mathcal{Z}/\mathbb{Z} = T^2$, mit $\mathcal{Z} = \big\{(t, \cos\theta, \sin\theta) | t \in \mathbb{R}, \theta \in [0, 2\pi]\big\}$, ein Torus, wobei $\mathbb{Z}$ auf $\mathcal{Z}$ mittels $xk = x + k \cdot (1,0,0)$ (Translationsgruppe) operiere. Man verklebt so Ränder von Teilstücken der Länge 1. Die Metrik auf T^2 ist lokal isometrisch zu $(\mathbb{R}^2, \langle\cdot,\cdot\rangle)$. (Die Rotationsfläche hat eine andere Metrik!)

(ii) Sei $\{a_1, \ldots, a_n\}$ Basis von $\mathbb{R}^n$. Man erhält eine Aktion von $\mathbb{Z}^n$ auf $\mathbb{R}^n$ mittels

$$x(k_1, \ldots, k_n) = x + \sum_i k_i a_i$$

$\mathbb{Z}^n$ ist Untergruppe der Translationsgruppe in $\mathbb{R}^n$. $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n = T^n$ ist ein *flacher Torus*, diffeomorph zu $\underbrace{S^1 \times \ldots \times S^1}_{n-mal}$, lokal isometrisch zu $\mathbb{R}^n$.

Satz 2.34. *Seien T_1, T_2 flache n–Tori gegeben durch Basen $\{a_1, \ldots, a_n\}$, bzw. $\{b_1, \ldots, b_n\}$ von $\mathbb{R}^n$. Dann gilt: T_1 und T_2 sind isometrisch genau dann, wenn es eine lineare Abbildung $A \in O(n)$ mit*

$$Aa_i = Ab_i$$

gibt. (Basis, die T_1 beschreibt, wird in Basis, die T_2 beschreibt, überführt).

Beweis. (s.a. Gallot/Hulin) ($\Rightarrow$) allgemein: Sei G eine Gruppe, die auf M, N operiert (hier auf beiden $(\mathbb{R}^n)$'s, und zwar eigentlich diskontinuierlich; sei $\psi : M \to N$ eine Abbildung mit der Eigenschaft

$$\psi(xg) = \big[\psi(x)\big]g \quad \forall x \in M, g \in G$$

(die Abbildung ψ ist *äquivariant unter G*).
Dann induziert ψ eine Abbildung $\tilde{\psi} : M/G \to N/G$. Ein Orbit wird auf einen anderen Orbit unter ψ (bzw. $\tilde{\psi}$) abgebildet, und man erhält für die Quotientenabbildung:

$$\tilde{\psi}(xg) = \psi(x)g$$

So kann man das auf $\mathbb{R}^n$ auch machen; die so erhaltene Abbildung ist linear und bildet Basen in Basen ab. $\square$

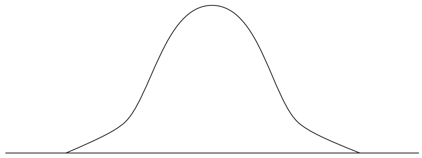
Satz 2.35. *Jede Riemannsche Mannigfaltigkeit besitzt eine Riemannsche Metrik*

Beweis. Wähle eine Kartenüberdeckung U_α von M. Da M parakompakt ist (M ist regulär, da lokal homöomorph zu $\mathbb{R}^n$ und erfüllt das zweite Abzählbarkeitsaxiom), gibt es eine lokal endliche Verfeinerung von $\{U_\alpha\}$, d.h. es gibt eine Überdeckung durch offene Mengen $\{V_\beta\}$, so daß

(i) jeder Punkt $x \in M$ nur in endlich vielen V_β enthalten ist.
(ii) für jedes β gibt es ein α, so daß $V_\beta \subset U_\alpha$.

Zu jeder solchen Verfeinerung $\{V_\beta\}$ gibt es eine Partition der 1 (s. Infini III), also C^∞–Funktionen $f_\beta : M \to \mathbb{R}$ mit

(a) $f_\beta \geq 0$
(b) $\overline{\operatorname{supp}(f_\beta)} \subset \mathring{V}_\beta$ für ein β
(c) $\sum_\beta f_\beta \equiv 1$



Auf $\mathbb{R}^n$ gibt es eine Riemannsche Metrik. Definiere $g_\beta(X,Y) := \langle \partial\varphi_\beta(X), \partial\varphi_\beta(Y)\rangle$, wenn $\varphi_\beta : V_\beta \to \mathbb{R}^n$ die Karte für V_β und $X, Y \in TM$ sind. Damit hat man auf M zumindest fast eine Riemannsche Metrik. Nun muß man die lokal gegebenen Schnitte noch zu einem globalen yusammenfügen.
Man setzt also

$$g(X,Y) = \sum_\beta f_\beta g_\beta(X,Y) \ .$$

Diese Funktion ist wohldefiniert, da es wegen der lokalen Endlichkeit nur endlich viele Summanden $\neq 0$ gibt. Linearität und ähnlich schöne Eigenschaften übernimmt g vom Skalarprodukt. Es fehlt noch, daß die Summe für $0 \neq x = y$ wirklich überall echt größer 0 ist, damit g positiv definit. Aber weil $\{V_\beta\}$ Überdeckung ist, bekommt man für jeden Punkt mindestens einen Summanden $\delta_\beta(X,X)$, der > 0 ist. $\square$

Definition 2.36. Seien M, N Riemannsche Mannigfaltigkeiten. Eine differenzierbare Abbildung $f : M \to N$ heißt *konform* oder *winkeltreu*, falls f Winkel erhält, also wenn gilt:

$$\langle \mathrm{D}f(p)X, \mathrm{D}f(p)Y\rangle_N = \lambda(p)\, \langle X, Y\rangle_M$$

mit $X, Y \in T_pM, \lambda \in \mathcal{C}^\infty(M), \lambda(p) \geq 0$.

Beispiel 2.37. (i) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ (mit Standardskalarprodukt) ist konform, falls f holomorph.

(ii) Die *Inversion* (oder *Spiegelung*)

$$I : \mathbb{R}^n - \{0\} \to \mathbb{R}^n - \{0\} \ ,$$
$$p \mapsto \frac{p}{|p|^2} \ .$$

Das ist eine Inversion an S^{n-1}, Punkte auf der Sphäre bleiben invariant.

Lemma 2.38. *I ist konform, genauer gilt:*

$$\langle \partial I \cdot X, \partial I \cdot Y\rangle = \frac{\langle X, Y\rangle}{|p|^4} \ .$$

Beweis. Nimm Kurve $p(s)$ mit $p(0) = p, p'(0) = X$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\partial I \cdot X|_{s=0} &= \frac{d}{ds} I(p(s))|_{s=0} = \frac{d}{ds}\frac{p}{|p|^2}|_{s=0} \\
&= \frac{|p|^2 p' - 2\langle p, p'\rangle\, p}{|p|^4}|_{s=0} \\
&= \frac{X}{|p|^2} - 2\frac{\langle p, X\rangle}{|p|^4} p
\end{aligned}$$

Also folgt

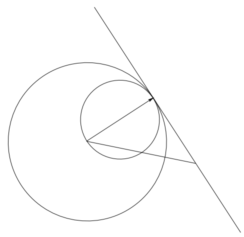
$$\begin{aligned}\langle \partial I \cdot X, \partial I \cdot Y\rangle &= \left\langle \frac{X}{|p|^2} - 2\frac{\langle p, X\rangle}{|p|^4}p, \frac{Y}{|p|^2} - 2\frac{\langle p, Y\rangle}{|p|^4}p \right\rangle \\ &= \frac{\langle X, Y\rangle}{|p|^4}\end{aligned}$$

Damit ist I konform, aber da $\lambda_p \neq 1$ nicht isometrisch. □

Beispiel 2.39. (Stereographische Projektion)

$$\begin{aligned}S_r(q) &:= \{p \in \mathbb{R}^n : |p-q|^2 = r^2\}; \\ S^{n-1} &:= S_1(0)\end{aligned}$$

Sei $e \in S^{n-1}$ ein Einheitsvektor. Konstruiere folgende Abbildung



Lemma 2.40. *I bildet $S_{1/2}(e/2) - \{0\}$ konform auf die tangentiale Hyperebene*

$$\begin{aligned}T_e S_{1/2}(e/2) = T_e S_1(0) &= T_e S^{n-1} \\ I : S_{\frac{1}{2}}(\tfrac{e}{2}) &\to T_e S^{n-1}\end{aligned}$$

ab.

Beweis.

$$\begin{aligned}p \in S_{\frac{1}{2}}(\tfrac{e}{2}) &\iff |p - \tfrac{e}{2}|^2 = \frac{1}{4} \\ &\iff |p|^2 - < e, p > + \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{4} \\ &\iff \langle \tfrac{p}{|p|^2}, e\rangle = 1 \\ &\iff \langle I(p), e\rangle = 1 \\ &\iff I(p) \in T_e S_{\frac{1}{2}}(\tfrac{e}{2})\end{aligned}$$

Umgekehrt: $I^2 = \mathrm{Id}$, also landet man wieder am Ausgangspunkt. □

Definition 2.41. Die Einschränkung

$$\begin{aligned}\sigma &:= I|_{S_{1/2}(e/2)} \\ \sigma &: S_{\frac{1}{2}}(\tfrac{e}{2}) \to T_e S^{n-1}\end{aligned}$$

heißt *stereographische Projektion*

Korollar 2.42. *σ ist konform.*

Lemma 2.43. *I bildet Sphären und Ebenen auf Sphären und Ebenen ab.*

Beweis.

$$\begin{aligned}
I(S_r(q)) &= I\{p : |p-q|^2 = r^2\} \\
&= \{p : |\frac{p}{|p|^2} - q|^2 = r^2\} \\
&= \{p : |I(p) - q|^2 = r^2\} \\
&= \left\{p : \frac{1}{|p|^2} - 2\frac{\langle p,q\rangle}{|p|^2} + |q|^2 = r^2\right\} \\
&= \{p : |p|^2(|q|^2 - r^2) - 2\langle p,q\rangle + 1 = 0\} \\
&\Longleftrightarrow \qquad\qquad\qquad\qquad 1 - 2\langle p,q\rangle = |p^2|(r^2 - |q|^2)
\end{aligned}$$

Falls $|q|^2 = r^2$ gilt, geht ie Sphäre $S_r(q)$ um q mit Radius r durch 0 und die Gleichung beschreibt eine Ebene. Falls

$$|q|^2 \neq |r|^2 \rightarrow$$

formt man wqeiter um:

$$\ldots \Longleftrightarrow \left|p - \underbrace{\frac{q}{r^2 - |q|^2}}_{a}\right|^2 = \underbrace{\frac{1}{(r^2 - |q|^2)^2} - \frac{|q|^2}{(r^2 - |q|^2)^2}}_{R}$$

und das beschreibt eine Sphäre mit Radius R um a. Die Rechnung für das Bild von Ebenen geht ähnlich. $\square$

Definition 2.44.

$$\begin{aligned}
\mathbb{H}^n &:= \{x \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\} \\
\partial\mathbb{H}^n &:= \{x \in \mathbb{R}^n : x_n = 0\} = \mathbb{R}^{n-1} \\
B_r(p) &:= \{x \in \mathbb{R}^n : |x-p|^2 < r^2\} \\
\mathcal{B}^n &:= \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\} = B_1(0)
\end{aligned}$$

Beispiel 2.45. Konforme Automorphismen von $\mathbb{H}^n$.
Wir betrachten auf $\mathbb{H}^n$ zunächst die euklidische Metrik.

(i) Translationen $f : p \mapsto p + v, \quad v \in \mathbb{R}^{n-1} = \partial\mathbb{H}^n$ sind isometrisch, also insbesondere konform, denn $df = \mathrm{Id}$. Da df von maximalen Rang ist f auch (lokal) bijektiv, und durch die vorgenommene Einschränkung an v ist gesichert, daß $f(x) \in \mathbb{H}^n$.

(ii) Streckungen $p \mapsto \lambda p, \quad \lambda \in \mathbb{R}^+$ sind konforme Automorphismen, denn $df = \lambda\mathrm{Id}$ also $\left\langle df_{|p}X, df_{|p}Y\right\rangle = \lambda^2\langle X, Y\rangle$,

(iii) $I \circ A$, $A \in O(n)$ (Rotation) sind konforme Automorphismen. Rotationen von $\mathcal{B}^n$ sind Isometrien und daher erst recht konform. Da wir mit einer Spiegelung $\mathcal{B}^n$ welcher? konform auf $\mathbb{H}^n$ abbilden können, erhalten wir durch Konjugation mit dieser Spiegelung auch *konforme Drehungen* von $\mathbb{H}^n$!

Nun stellt sich die Frage nach der Existenz einer Riemannschen Metrik auf $\mathbb{H}^n$, bzgl. der alle obigen konformen Automorphismen *Isometrien* sind? Wir versuchen, eine derartige Riemannsche Metrik durch Multiplikation des euklidischen Standardskalarproduktes mit einem Konformfaktor zu finden. Wir definieren versuchsweise so, daß wir den Abstand eines Punktes p vom Rand des Definitionsbereiches als Kriterium für $g_p = f(p)\langle\cdot,\cdot\rangle$ nehmen. Damit sollte dann ii) isometrisch sein. i) war es ja ohnehin schon.

Definition 2.46. Sei $\operatorname{dist}(p, \partial\mathbb{H}^n)$ der euklidische Abstand von p zum $\mathbb{R}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ und $\langle\cdot,\cdot\rangle$ das Standardskalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^n$. Dann heißt

$$(\mathbb{H}^n, \frac{1}{\operatorname{dist}(p, \partial\mathbb{H}^n)^2}\langle\cdot,\cdot\rangle)$$

der n-dimensionale *reell hyperbolische Raum*, und die so definierte Riemannsche Metrik heißt *hyperbolische Metrik.*

Lemma 2.47. *Bezüglich der hyperbolischen Metrik auf $\mathbb{H}^n$ sind die Translationen und Streckungen Isometrien.*

Beweis. Für die Translationen beachte, daß der Konformfaktor nur vom Abstand des Punktes zum Rand abhängt, also translationsinvariant ist. Für die Streckungen berechne mit $\Lambda(p) := \lambda \cdot p$

$$\frac{1}{\operatorname{dist}(\Lambda(p), \partial\mathbb{H}^n)^2}\langle\partial\Lambda\cdot X, \partial\Lambda\cdot Y\rangle = \frac{1}{\operatorname{dist}(p, \partial\mathbb{H}^n)^2}\langle X, Y\rangle$$

□

Korollar 2.48. *Die Isometriegruppe des hyperbolischen Raumes operiert transitiv.*

Beweis. klar. □

Um auch die konformen Drehungen als Isometrien nachzuweisen, ziehe zuerst die Riemannsche Metrik mit einer konformen Abbildung auf den Ball zurück, da wir dort die Rotationen kennen und ja auch schon ∂I bekannt ist.

Lemma 2.49. *($\cong$ heißt isometrisch)*

$$\left(\mathbb{H}^n, \frac{1}{\operatorname{dist}(p, \partial\mathbb{H}^n)^2}\langle\cdot,\cdot\rangle\right) \cong \left(B_r(q), \frac{(2r)^2}{(r^2 - |p-q|^2)^2}\langle\cdot,\cdot\rangle\right)$$

Bemerkung. (i) Der Abstand $\operatorname{dist}(p, \partial B_r(q))$ eines Punktes zum Kreisrand ist unter Rotation invariant.
(ii) $\left(B_r(q), \frac{(2r)^2}{(r^2-|p-q|^2)^2}\langle\cdot,\cdot\rangle\right)$ heißt Poincaré Scheibe.

Beweis. Mit $e = (0, \dots, 0, 1)$ gilt

$$\begin{aligned}\left(\mathbb{H}^n, \frac{1}{\operatorname{dist}(p, \partial\mathbb{H}^n)^2}\langle\cdot,\cdot\rangle\right) &\cong \left(\{p : p_n > 1\}, \frac{1}{(1 - \langle p, e\rangle)^2}\langle\cdot,\cdot\rangle\right)\\ &\cong \left(B_{\frac{1}{2}}(\frac{e}{2}), \frac{1}{|p|^4\left(1 - \left\langle \frac{p}{|p|^2}, e\right\rangle\right)^2}\langle\cdot,\cdot\rangle\right)\end{aligned}$$

durch Anwenden von $I : p \mapsto \frac{p}{|p|^2}$, und im Skalarprodukt tritt noch einmal die Ableitung von I auf: $\langle\partial I\, X, \partial I\, Y\rangle = \frac{1}{|p|^4}\langle X, Y\rangle$

$$\begin{aligned}&\cong \left(B_{\frac{1}{2}}(\frac{e}{2}), \frac{1}{(|p|^2 - \langle p, e\rangle)^2}\langle\cdot,\cdot\rangle\right)\\ &\cong \left(B_{\frac{1}{2}}(\frac{e}{2}), \frac{1}{\underbrace{\left(\left|p - \frac{e}{2}\right|^2 - \frac{1}{4}\right)^2}_{\text{Abstand zum Rand bezüglich } e/2}}\langle\cdot,\cdot\rangle\right)\end{aligned}$$

Um das auf den Abstand zum Kreisrand umzutransformieren, muß man noch eine Translation (isometrisch) und eine Streckung von $1/2 \to r$ durchführen.

$$\cong \left(B_{\frac{1}{2}}(0), \frac{1}{(|p|^2 - \frac{1}{4})^2} \langle \cdot, \cdot \rangle\right)$$

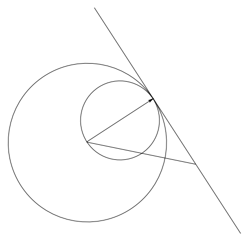
$$\cong \left(B_r(0), \frac{(2r)^2}{(|p|^2 - r^2)^2} \langle \cdot, \cdot \rangle\right)$$

Man nimmt hier eine Streckung $\rho : |p| \to \frac{1}{2r}|p|$ vor. Lemma 2.47 liefert

$$\cong \left(B_r(q), \frac{(2r)^2}{(|p - q|^2 - r^2)^2} \langle \cdot, \cdot \rangle\right)$$

□

Bemerkung. Man hat hier nicht mit dem radialen Abstand vom Rand gerechnet, sondern mit dem dazu orthogonalen:



Auch dieser ist unter Rotation invariant.

Korollar 2.50. *Auch die konformen Drehungen sind Isometrien bzgl. der hyperbolischen Metrik.*

Beweis. Wir brauchen nur einzusehen, daß Rotationen vom Ball um seinen Mittelpunkt Isometrien bzgl. obiger Metrik auf dem Ball sind. Das folgt aber daraus, daß der Konformfaktor nur vom Abstand zum Mittelpunkt abhängt. □

Bemerkung. Die von den oben betrachteten konformen Automorphismen erzeugte Gruppe heißt *Gruppe der Möbiustransformationen*. Man kann zeigen, daß alle konformen Automorphismen vom $\mathbb{R}^n$ Möbiustransformationen sind.

Definition 2.51. Seien $X, Y \in \mathbb{R}^{n+1}$.

$$\langle X, Y \rangle_L := \sum_{i=0}^{n-1} X_i Y_i - X_n Y_n$$

heißt *Lorentz-Skalarprodukt*. Wenn wir den $\mathbb{R}^{n+1}$ mit dieser symmetrischen aber nicht positiv definiten Bilinearform meinen, nennen wir ihn auch den *Lorentzraum* $\mathbb{R}^{n,1}$.
Eine lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^{n,1} \to \mathbb{R}^{n,1}$ heißt *L-orthogonal*, falls

$$\langle AX, AY \rangle_L = \langle X, Y \rangle_L \qquad \forall X, Y \in \mathbb{R}^{n,1}$$

Die L-orthogonalen Abbildungen bilden eine Gruppe $O(n, 1)$, die *Lorentz–orthogonale Gruppe*
Eine differenzierbare Abbildung $f : \mathbb{R}^{n,1} \to \mathbb{R}^{n,1}$ heißt *L-konform*, falls

$$\langle \partial f|_p X, \partial f|_p Y \rangle_L = \lambda_p \langle X, Y \rangle_L \qquad \forall X, Y \in T_p\mathbb{R}^{n,1} \cong \mathbb{R}^{n,1}$$

Beispiel 2.52. (i) Sei A euklidisch orthogonal. Dann ist

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$$

L–orthogonal, und damit auch L–isometrisch.

(ii) Aber auch

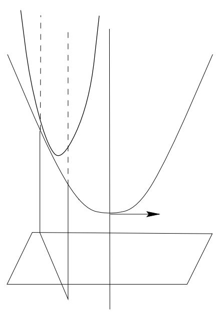
$$\begin{pmatrix} \mathrm{Id} & \multicolumn{2}{c}{0} \\ \multirow{2}{*}{0} & \cosh s & \sinh s \\ & \sinh s & \cosh s \end{pmatrix}$$

ist L–orthogonal also L–isometrisch

Definition 2.53. Sei $r > 0$. Dann definieren wir Sphären mit Radius $-r$ als

$$S_{-r}(q) := \{p \in \mathbb{R}^{n,1} : |p-q|_L^2 = -r^2\} \ ,$$

wobei $|p-q|_L := \langle p-q, p-q\rangle_L$. $S_{-r}(q)$ besteht aus zwei Zusammenhangskomponenten (im $\mathbb{R}^{2,1}$ ist $S_{-r}(q)$ ein zweischaliges Rotationshyperboloid), deren obere wir mit $S^+_{-r}(q)$ bezeichnen.



Lemma 2.54. *$O(n,1)$ operiert transitiv auf $S_{-1}(0)$.*

Beweis. Sei $p = (x,h) \in S_{-1}(0) \subset \mathbb{R}^{n,1}$. Dann können wir mit den L-orthogonalen Abbildungen aus Beispiel (i) p auf alle Punkte in $S_{-1}(0)$ mit gleicher Höhe h oder $-h$ abbilden, und mit den Abbildungen aus Beispiel (ii) können wir p auf jede Höhe anheben. ☐

Korollar 2.55. *Die Einschränkung des Lorentzskalarproduktes auf das Tangentialbündel von $S_{-1}(0)$ ist positiv definit, also eine Riemannsche Metrik.*

Beweis. Das ist klar für $T_e S_{-1}(0)$ mit $e = (0, \dots, 0, 1)$ (beachte, daß der Nullpunkt des abstrakten Tangentialraums der Punkt e der tangentialen Hyperebene ist). Die L-orthogonalen Abbildungen operieren transitiv auf $S_{-1}(0)$ und liefern L-Isometrien von $S_{-1}(0)$. ☐

Lemma 2.56. *Sei $e = (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^{n,1}$.*

(i) *Die L–Inversion (Lorentz–Inversion)*

$$I_L(p) := \frac{p}{\langle p, p\rangle_L}$$

ist L-konform. ($p \in \mathbb{R}^{n,1}$ mit $\langle p, p\rangle_L \neq 0$.

(ii) *Die L-Inversion bildet* $\left(S_{-\frac{1}{2}}(\frac{e}{2})-0\right)$ *konform in die tangentiale Hyperebene* $T_{-e}S_{-1}(0)$ *ab, oder*

$$-I_L\left(S_{-\frac{1}{2}}(\frac{e}{2})-0\right)=T_eS_{-1}(0)-\{p\in\mathbb{R}^{n,1}:\langle p,p\rangle_L=0\}$$

(dies ist die L-stereographische Projektion)

(iii)

$$I_L\left(S^+_{-\frac{1}{2}}(\frac{e}{2})\right)=B_1(0)\subset T_eS_{-1}(0)$$

Beweis. Die Beweise von (i) und (ii) sind identisch mit den euklidischen, man kann sich lediglich mit den Vorzeichen leichter verheddern. Für (iii) beachte, daß $T_eS_{-1}(0)-\{p\in\mathbb{R}^{n,1}:<p,p>_L=0\}$ aus zwei Zusammenhangskomponenten besteht, dem Ball mit Radius 1 und dem Komplement. Vielleicht hilft auch eine Skizze.

□

Nach all dem ist es vielleicht nicht mehr zu verwunderlich, daß $S_{-1}(0)$ und der hyperbolische Raum etwas gemeinsam haben:

Lemma 2.57.

$$(S^+_{-1}(0),\langle\cdot,\cdot\rangle_L)\cong\left(\mathcal{B}^n,\frac{4}{(1-|p|^2)^2}\langle\cdot,\cdot\rangle\right)$$

Beweis.

$$\begin{aligned}(S^+_{-1}(0),\langle\cdot,\cdot\rangle_L)&\cong\left(S^+_{\frac{1}{2}}(\frac{e}{2}),4\langle\cdot,\cdot\rangle_L\right)\\&\cong\left(B_1(0)\subset T_eS_{-1}(0),\frac{4}{|(p,1)|_L^4}\langle\cdot,\cdot\rangle_L\right)\\&\cong\left(B_1(0),\frac{4}{(|p|^2-1)^2}\langle\cdot,\cdot\rangle\right)\end{aligned}$$

Dabei haben wir bei der Umformung zur zweiten Zeile die L-Inversion benutzt und einen Punkt in der tangentialen Hyperebene $T_eS_{-1}(0)$ als $(p,1)$ mit $p\in\mathbb{R}^n$ geschrieben. □

Definition 2.58. Die Riemannsche Mannigfaltigkeit

$$(S^+_{-1}(0),\langle\cdot,\cdot\rangle_L)$$

heißt Hyperboloid-Modell des hyperbolischen Raumes.

Der *hyperbolische Raum* $\mathbb{H}^n$ ist der Raum $\mathbb{H}^n=\{z\in\mathbb{R}^{n+1}|\ \langle z,z\rangle_L=-1,\ z_0>0\}$. $\mathbb{H}^n$ ist Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{n+1}$. Sei $c:I\to\mathbb{H}^n$ glatte Kurve, dann leite die charakteristische Gleichung $\langle c(t),c(t)\rangle_L=-1$ mit der Produktregel ab. Man erhält $\langle c(t),c'(t)\rangle_L=0$. Der *Tangentialraum* von $\mathbb{H}^n$ ist also das L–orthogonale Komplement von $c(t)$. $T_x\mathbb{H}^n=\{y|\ \langle y,x\rangle_L=0\}$.
Schneide jetzt den Kegel mit der Hyperebene D senkrecht zu $(1,0,\ldots,0)$ so, daß sie durch $(r,0,\ldots,0)$ geht mit $r>1$, man hat auf diese Weise einen echten Schnitt. Auf dem Schnitt ist $\langle\cdot,\cdot\rangle_L=\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{R}^n}$; man erhält also den Schnitt als S^{n-1}. $D\cap\mathbb{H}^n$ ist (auch im metrischen Sinne) eine *euklidische* Sphäre.
Für verschiedene Schnitte erhält man folgende Aussagen über ihre Geometrie:
Der Radius der Kreise hängt von der Höhe ab, in der man geschnitten hat, und zwar nicht linear sondern exponentiell. Genauer $R=\sinh\alpha$.
Die *Lorentzgruppe* $O(n,1)$ ist die Gruppe aller linearen Abbildungen $A\in GL(n+1)$, die $\langle\cdot,\cdot\rangle_L$ erhalten, d.h.

$$A\in O(n,1)\Longleftrightarrow A\in GL(n+1)\wedge\langle Ax,Ay\rangle_L=\langle x,y\rangle_L\ .$$

(Daß das eine Gruppe bzgl. ($\circ$) ist, sieht man wegen i) neutrales Element = Id, ii) inverses Element = A^{-1}, iii) mit $A, B \in O(n+1)$ folgt $\langle ABx, ABy \rangle_L = \langle Ax, Ay \rangle_L = \langle x, y \rangle_L$ nach Definition. Die Lorentzgruppe *operiert transitiv auf* $\mathbb{H}^n$. Man zeigt das zB. so, daß man jedes $x \in \mathbb{H}^n$ in $(1, 0, \ldots, 0)$ schieben kann: Weil $\langle x, x \rangle_L = -1 = \langle (1, 0, \ldots, 0), (1, 0, \ldots, 0) \rangle_L$ ist das L–orthogonale Komplement $x^\perp$ zu x ein komplementärer Unterraum zu x ($\{x\} \oplus x^\perp = \mathbb{R}^{n+1}$). Die Einschränkung von $\langle \cdot, \cdot \rangle_L$ auf $x^\perp$ ist positiv definit. Hat man aber zwei euklidische Vektorräume, dann erhält man eine Isometrie durch die Abbildung, die eine Orthonormalbasis bzgl. des einen Skalarproduktes eine Orthonormalbasis bzgl. des anderen Skalarproduktes zuordnet. Man kann daher folgendermaßen definieren: $L \in O(n, 1)$ sei definiert durch

(i) $Lx = (1, 0, \ldots, 0)$
(ii) Auf $x^\perp$ sei L durch die Isometrie definiert, die eine Basis von $x^\perp$ auf eine Basis von $(1, 0, \ldots, 0)^\perp$ abbildet (zB. Standardbasis).

Die *Isotropiegruppen* in x sind genau die Abbildungen, die x fest lassen, also die n–dimensionalen Rotationen in $O(n)$.
Die *stereographische Projektion* von $\mathbb{H}^n$ auf $\mathcal{B}^n = \{x \in \mathbb{R}^n | \, ||x|| < 1\}$ ist *konform*. Daraus folgt $\mathbb{P}\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) = O(2, 1)$ ist die volle Isometriegruppe der hyperbolischen Ebene.
Nähere Erklärung folgt sofort:
Die stereographische Projektion bildet den Schnitt $D \cap \mathbb{H}^n$ von $\mathbb{H}^n$ und der Hyperebene D auf eine euklidische Sphäre um 0 ab. Auf dem Bild hat man die normale euklidische Strukur.
Sei jetzt $n = 2$ und $O^+(2, 1)$ die Untergruppe von $O(2, 1)$, die das Hyperboloid $\mathbb{H}^{2^+}$ in sich überführt (ohne den negativen Arm). $O^+(2, 1)$ operiert als Gruppe von konformen Automorphismen auf $\mathcal{B}^2$ (denn man hat die konforme Struktur von $\mathbb{H}^2$ konform auf den Ball abgebildet, d.h. die Konformität bleibt erhalten).
Aus der Funktionentheorie sollte man sich erinnern: konforme Abbildungen von Gebieten in $\mathbb{C}$, die die Orientierung erhalten, sind holomorph. Definiere also $O_0^+(2, 1)$ als die Untergruppe von $O^+(2, 1)$, die die Orientierung erhalten ($\varphi' \in O_0^+(2, 1) \Longrightarrow \det d\varphi > 0$).
$O_0^+(2, 1)$ operiert als Gruppe von *holomorphen* Transformationen auf $\mathcal{B}^2$. Diese Gruppe wurde mit Hilfe des Schwarzschen Lemmas mit $\mathbb{P}\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ identifiziert. $O_0^+(2, 1) \subset \mathbb{P}\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ operiert als Gruppe der *Möbiustransformationen* auf $\mathcal{B}^2$.
Behauptung: $O_0^+(2, 1) = \mathbb{P}\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$

- die Gruppe $O_0^+(2, 1)$ operiert transitiv: dies folgt unmittelbar aus obiger Überlegung.
- Vergleich der Isotropiegruppen.

  Zerlege dazu jedes Element in einen Teil, der x festläßt, und einen anderen (z.B. *eine* Abbildung $x \mapsto 0$, komponiert mit allen Abbildungen, die 0 fest lassen, ergibt alle Abbildungen, die $x \mapsto 0$ haben). Die Isotropiegruppe von $O_0^+(2, 1)$ in $(1, 0, 0)$ enthält die Kreisgruppe mit fester erster Komponente, also die Rotationen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \subset O(2, 1) \; .$$

  Im Ball hat man als Isotropiegruppe in 0 die „normalen“ Rotationen (ebenfalls Kreisgruppe).

Die Metrik wird mit der stereographischen Projektion aus $SO(2)$ auf den Kreis projeziert. Man erhält also (modulo Skalierung) den Einheitskreis mit der Metrik $\frac{dz}{1-||z||^2}$ (dz Standardmetrik).

Sie ist invariant unter Drehung um θ. Damit stimmen die Isotropiegruppen von $O_0^+(2,1)$ und $\mathbb{P}\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ in 0 überein, und hieraus ergibt sich $O_0^+(2,1) = \mathbb{P}\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. Insbesondere ist damit $O^+(2,1)$ die volle Isometriegruppe von $\mathbb{H}^2$.

Bis jetzt haben wir noch kein Kriterium, um zu entscheiden, ob zwei Räume (lokal) isometrisch) sind. Bisher konnten wir das nur in $\mathbb{R}^n$ mittels des Skalarproduktes berechnen. Wir wissen auch nicht, ob $O(n,1)$ die ganze Isometriegruppe von $\mathbb{H}^n$ ist. Wir hatten in $\mathbb{R}^n$ das Kriterium, daß Geraden unter Isometrien in Geraden überführt werden; außerdem brauchten wir eine Abstandsfunktion: der Abstand ist die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten und entspricht den Geradenstücken. Aber auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten haben wir keine Geraden.

(M,g) sei zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit. Wir bezeichnen wie zuvor mit $\ell(c) = \int_a^b \|c'(t)\|\, dt$ die Länge einer glatten Kurve $c\colon [a,b] \to M$. Dabei sei $\|c(t)\| := g\big(c(t), c(t)\big)^{1/2}$.

Definition 3.1. Der *Abstand* $d(x,y)$ von $x, y \in (M,g)$ ist definiert durch

$$d(x,y) := \inf_c \left\{ \int_a^b \|c'(t)\|\, dt \mid c : [a,b] \to M \text{ glatte Kurve, } c(a) = x, c(b) = y \right\}.$$

Diese Definition ist mit der normalen Definition im euklidischen Raum verträglich, reflektiert aber besser die Geometrie der Mannigfaltigkeit und definiert einen „natürlichen“ Abstand (vergleiche „Käfermetrik“ und euklidische Metrik auf S^2).

Satz 3.2. *d ist ein Abstand (= Metrik) auf (M,g), der die ursprüngliche Topologie erzeugt.*

Sprechweise: „Abstand“ wird für Metriken verwendet, „Metrik“ für *Riemannsche* Metriken.

Beweis. (i) $d(x,x) = 0$ ist klar, denn wähle $c_x(t) = x\ \forall t$, dann ist $\ell(c_x) = 0$.

(ii) $d(x,y) = d(y,x)$, denn $\ell(c) = \ell(c^{-1})$, wobei c^{-1} die rückwärts durchlaufene Kurve ist: $c^{-1}(t) = c(ta + (1-t)b)$

(iii) $d(x,z) + d(z,y) \geq d(x,y)$, denn $\ell(c_1 \cdot c_2) = \ell(c_1) + \ell(c_2)$, wobei $c_1 \cdot c_2(t) = \begin{cases} c_1(t) & t \in [a,b] \\ c_2(t) & t \in [b,c] \end{cases}$

(„Komposition“ von c_1, c_2).

Es fehlt noch: $d(x,y) = 0 \Longrightarrow x = y$ und die Topologieaussage.

Sei $x \in U, \psi : U \to \psi(U) = V \subset \mathbb{R}^n, x \mapsto \psi(x)$, d.h. sei ψ Koordinate für U. Zu $K \subset U$ kompakt gibt es ein $\alpha > 0$ mit

$$\alpha^{-1} \|X\|_g \geq \|D\psi(X)\|_{\mathbb{R}^n} \geq \alpha \|X\|_g \quad \text{für } X \in TK.$$

$(\|\cdot\|_g = g(\cdot,\cdot)^{1/2})$

Ist $c : [a,b] \to K$ eine Kurve, dann gilt

$$(*) \qquad \alpha^{-1}\ell(c) \geq \ell(\underbrace{\psi \circ c}_{\subset \mathbb{R}^n}) \geq \alpha\, \ell(c)$$

Das heißt aber, daß die Topologien übereinstimmen.

Sei $y \in M$, $c : [0,b] \to M$ eine Kurve, die x mit y verbindet. Wähle $\epsilon > 0$ so, daß $B_\epsilon\big(\psi(x)\big)$ in $\psi(K)$ liegt. Es gibt zwei Fälle:

(a) c liegt ganz in K, dann gilt

$$\ell(c) \geq \alpha\, \ell(\psi \circ c) \geq \alpha \|\psi(x) - \psi(y)\|_{\mathbb{R}^n}$$

(Die rechte Seite hängt nicht mehr von c ab.) Das geht,weil $K \subset U$, und die Ungleichung $(*)$ gilt. Der „rechteste“ Teil ist die Länge der kürzesten Verbindung zwischen x und y in $\mathbb{R}^n$, nach oben abgeschätzt durch den mittleren Teil, der eine „beliebige“ Kurve von x nach y beschreibt.

(b) c stößt an den Rand von K. Dann kann man mit der Ungleichung Probleme bekommen, denn sie gilt ausschließlich lokal.

Es gibt aber $t_0 \in]0,b[$ mit $\psi\big(c([0,t_0])\big) \subset B_\epsilon\big(\psi(x)\big)$ und $\big\|\psi\big(c(t_0)\big) - \psi\big(\underbrace{c(0)}_{=x}\big)\big\| = \epsilon$.

Die Länge des Teilstückes von $c(0)$ bis $c(t_0)$ muß bereits größer als $\alpha\epsilon$ sein (nach der Abschätzung). Erst recht gilt das für die ganze Kurve.

Insbesondere folgt hieraus, daß $d(x,y) > 0$ für $x \neq y \in M$ und d ist Abstand. Außerdem: Für $\delta < \alpha\epsilon$ liegt das Bild unter ψ des Balls $B_\delta(x)$ in (M,g) in $B_{\alpha^{-1}\delta}(\psi(x)) \subset B_\epsilon(\psi(x))$ und enthält $B_{\alpha\delta}(\psi(x))$. Man erhält also aus offenen Umgebungen bzgl. der Metrik d offene Umgebungen bzgl. der Topologie von M und umgekehrt, d.h. d induziert die Topologie von M. Damit ist die Behauptung bewiesen. □

Bemerkung. Für festes $p \in M$ ist die Funktion $q \mapsto d(p,q)$ stetig auf M!

Satz 3.3. *Für die Kurve $c : [0,b] \to M$ definiere*

$$\tilde{\ell}(c) = \sup_{0<t_o<\ldots<t_k<b} \sum_{i=1}^{k} d\big(c(t_{i-1}), c(t_i)\big).$$

Wenn c stetig differenzierbar ist, dann gilt $\tilde{\ell}(c) = \ell(c) = \int_a^b ||c'(t)||\, dt$.

Beweis. (i) $\tilde{\ell} \leq \ell$: Wähle eine Unterteilung $0 = t_0 \leq \cdots \leq t_k = b$ so, daß $\tilde{\ell}(c) \leq \sum d\big(c(t_i), c(t_{i-1})\big) + \epsilon$ ist. (An das Supremum kommt man beliebig nahe heran.) Man weiß:

$$\ell(c)_{|[t_{i-1},t_i]} \geq d\big(c(t_i), c(t_{i-1})\big)$$

das heißt $\tilde{\ell}(c) \leq \ell(c) + \epsilon$ für alle $\epsilon > 0$, also $\tilde{\ell} \leq \ell$.

(ii) Zu $x \in M$ gibt es eine Umgebung U und eine Karte $\psi : U \to \mathbb{R}^n$ mit

$$(*) \qquad (1+\epsilon)\,||X|| \geq ||D\psi(X)||_{\text{eukl.}} \geq (1+\epsilon)^{-1}\,||X|| \quad \forall X \in TU\ .$$

Wähle dazu die Karte ψ so, daß $D\psi_{|T_xM}$ Isometrie von $(T_xM, g) \to \big(\mathbb{R}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$ ist (lineare Isometrie, man bildet Basen des Tangentialraumes auf Basen des $\mathbb{R}^n$ ab). Dann kann in U die Länge verglichen werden (mit Einschränkung für „Grenzbereiche" wie oben), d.h. es gibt eine Umbebung $V \subset U$ von x mit

$$(**) \qquad (1+\epsilon)d(z,y) \geq ||\psi(z) - \psi(y)|| \geq (1+\epsilon)^{-1}d(z,y)$$

für $z, y \in V$.

Man erhält also aus beiden Definitionen „ungefähr" die euklidische Länge von oben. Genauer: Ist $c \subset V$ und bezeichnet $\ell_e(\psi \circ c)$ die euklidische Länge von $\psi \circ c$, dann folgt aus $(**)$ und der Definition von $\tilde{\ell}$, daß

$$(***) \qquad \tilde{\ell}(c) \geq (1+\epsilon)^{-1}\ell_e(\psi \circ c) \geq (1+\epsilon)^{-2}\ell(c)\ .$$

Wählt man also eine Unterteilung von c in genügend kleine Teilstücke dann folgt aus $(***)$ für Teilstücke von c insgesamt $\tilde{\ell}(c) \geq (1+\epsilon)^{-2}\ell(c)$ für beliebig vorgegebenes ϵ, woraus folgt $\ell = \tilde{\ell}$ auf M.

□

Definition 3.4. Eine *minimale Geodätische* in (M,g) ist eine Kurve $c : [a,b] \to M$ so, daß es ein $\alpha \geq 0$ gibt, mit

$$\ell(c)_{|[s,t]} = \alpha(t-s) = d\big(c(s), c(t)\big)$$

für $a \leq s < t \leq b$.

Ist die Kurve differenzierbar, dann muß c proportional zu der Bogenlänge parametrisiert sein, $||\dot{c}|| = \text{const.}$ Eine *Geodätische* auf (M,g) ist eine Kurve $c : [a,b] \to M$, so, daß zu $t \in [a,b]$ ein ϵ existiert, so daß $c_{|[t-\epsilon,t+\epsilon]}$ minimale Geodätische ist.

Bemerkung. Im $(\mathbb{R}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ sind Geodätische und minimale Geodätische die Geraden(segmente); i.a. sind die Begriffe nicht deckungsgleich. Betrachtet man z.B. einen Großkreis auf der Sphäre, so kann man zwei Punkte durch Geodätische unterschiedlicher Länge verbinden, man kann in 2 Richtungen laufen oder den Großkreis auch mehrmals durchlaufen.

Lemma 3.5. *Eine differenzierbare Kurve $c : [a,b] \to M$ ist genau dann eine minimale Geodätische, wenn die „Energie“ $E(c) \leq E(\gamma)$ für jedes $\gamma : [a,b] \to M, \gamma(a) = c(a), \gamma(b) = c(b)$, wobei*

$$E(\gamma) = \frac{1}{2}\int_a^b ||\gamma'(t)||^2\,dt.$$

Bemerkung. Die Abstandsfunktion ist in 0 nicht differenzierbar; nimmt man aber das Quadrat, dann geht das. Die Menge der genügend regulären Kurven im $\mathbb{R}^n$ ist Mannigfaltigkeit mit Länge bzw. Quadratwurzel der Energie als Norm.

Beweis.

$$\begin{aligned}
\ell(\gamma) &= \int_a^b ||\gamma'(t)||\,dt \leq (b-a)^{1/2}\left(\int_a^b ||\gamma'(t)||^2\,dt\right)^{1/2} \\
&= (b-a)^{1/2}\big(2E(\gamma)\big)^{1/2},
\end{aligned}$$

und Gleichheit gilt genau für $||\gamma'(t)|| = \text{const}$. Also ist $E(\gamma) \geq \frac{1}{2(b-a)}\,d\big(\gamma(a),\gamma(b)\big)^2$, und Gleichheit gilt genau dann, wenn γ minimale Geodätische ist. $\square$

Bemerkung. Für Geodätische gilt in der Dreiecksungleichung die Gleichheit:

$$d\big(c(0),c(t)\big) + d\big(c(t),c(1)\big) = d\big(c(0),c(1)\big)\ .$$

Beispiel 3.6. $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ ist Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$. Sei $c(t) = (\cos t, 0, \sin t)$ $(t \in]0,\pi[)$. Man rotiere das um die x–Achse und erhält folgende Parametrisierung der S^2:

$$\begin{gathered}
\psi :]0,\pi[\, \times S^1 \to \mathbb{R}^3 \\
\psi(t,\Theta) = (\cos t, \sin\Theta\sin t, \cos\Theta\sin t)\ .
\end{gathered}$$

In diesen Koordinaten ist eine Metrik gegeben durch

$$g_{11} = 1\ ,\quad g_{12} = g_{21} = 0\ ,\quad g_{22} = \sin^2 t$$

(Die Indizes beschreiben die Standardrichtungen)
Finde hier eine minimale Geodätische, die $(1,0,0)$ mit $(\cos t, 0, \sin t)$ verbindet.
Behauptung: Das ist ein Stück der rotierten $c(t)$.
In Koordinaten entspricht die erzeugende Kurve der Abbildung $s \mapsto (s,0)$. Finde eine kürzere Kurve in $]0,\pi[\, \times S^1$ von $(0,0)$ nach $(t,0)$ bzgl. der durch g bestimmten Metrik.
Sei $c(s) = \big(c_1(s), c_2(s)\big)$ irgendeine solche (differenzierbare) Kurve, z.B. auf $[0,1]$.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 c_1'(s)\,ds &\overset{!}{=} t \qquad \text{und} \\
\int_0^1 c_2'(s)\,ds &\overset{!}{=} 0\ .
\end{aligned}$$

Damit muß

$$\begin{aligned}\int_0^1 \|c'(s)\|\,dt &= \int_0^1 \big(g(c'(s),c'(s))\big)^{1/2}\,ds\\ &= \int_0^1 \Big((c_1'(s))^2 + \underbrace{\big[\sin^2 c_1(s)\cdot (c_2(s))^2\big]}_{(*)}\Big)^{1/2} ds\\ &\geq \int_0^1 |c_1'(s)| \geq \int_0^1 c_1'(s)\,ds = t\ .\end{aligned}$$

Für Gleichheit muß $(*) = 0$ gelten, das tritt genau dann ein, wenn $c'(s) = 0$, das heißt $c_2 = \text{const}$, also $c_2(s) \equiv 0$ ist, d.h. wenn c Umparametrisierung von $s \mapsto (s,0)$ ist; dann ist c auf S^2 Großkreis (d.h. Schnitt einer Hyperebene durch 0 mit S^2).

Bemerkung. Ist $\psi : (M,g) \to (M,g)$ Isometrie, dann bildet ψ Geodätische auf Geodätische ab. (Hier: Rotationen.) Alle sind auch minimale Geodätische.

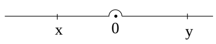
Eigenschaften der Geodätischen

(i) Durch 2 Punkte $x, y \in S^2,\ x \neq -y$ kann man einen eindeutigen Großkreis finden. (Je 2 Punkte in S^2 können durch eine minimale Geodätische verbunden werden.)

(ii) Ist $x = -y$, dann ist jede durch x gehende Geodätische minimale Geodätische von x nach y.

(iii) Durch je zwei beliebige Punkte aus S^2 gehen abzählbar viele verschiedene Geodätische, die nicht minimal sind (z.B. längeres der beiden Segmente des Großkreises durch x und y, mehrmals durchlaufener Großkreis).

Beispiel 3.7. $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ ist Riemannsche Mannigfaltigkeit; Abstand $d(x,y) = \|x-y\|$. Strecken, die 0 enthalten, approximiert man durch kleine Umgehungen: $(-1,0)$ kann *nicht* mit $(1,0)$ durch minimale



Geodätische verbunden werden! (Man findet keine Kurve der Länge 2 von $(-1,0)$ nach $(1,0)$ in $\mathbb{R}^2 - \{0\}$. Der Raum ist nicht „vollständig".)

Definition 3.8. (M,g) heißt *vollständig*, falls die von g definierte Abstandsfunktion d eine vollständige Metrik (Abstandsfunktion) auf M ist (d.h., daß Cauchy-Folgen in (M,d) konvergieren).

Lemma 3.9. *Sei* $B_r(x) = \{y \mid d(x,y) < r\}$, $\overline{B}_r(x) = \{y \mid d(x,y) \leq r\}$. *Für* $x, y \in M$ *und* $r_1, r_2 > 0$ *mit* $r_1 + r_2 < d(x,y)$ *sei*

$$d\big(B_{r_1}(x), B_{r_2}(y)\big) = \inf\big\{d(w,z) \mid w \in B_{r_1}(x), z \in B_{r_2}(y)\big\}\ .$$

Dann gilt $d\big(B_{r_1}(x), B_{r_2}(y)\big) \leq d(x,y) - r_1 - r_2$.

Beweis. Wähle $c : [0,b] \to M$ nach der Bogenlänge parametrisiert, $c(0) = x$, $c(b) = y$ und $\ell(c) \leq d(x,y) + \epsilon$ für $\epsilon > 0$. Dann folgt $c(r_1) \in \bar{B}_{r_1}(x)$, $c(b - r_2) \in \bar{B}_{r_2}(y)$, und

$$\begin{aligned} d\big(c(r_1), c(b-r_2)\big) &\leq \ell(c_{|[r_1, b-r_2]}) = b - r_1 - r_2\\ &\leq d(x,y) - r_1 - r_2 + \epsilon\ , \qquad \epsilon \text{ beliebig.}\end{aligned}$$

(Für andere Metriken, z.B. diskrete Metrik kann das durchaus falsch sein!) □

Satz 3.10. *(Satz von Hopf-Rinow) Sei* (M,g) *eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann gilt*

(i) *Beschränkte abgeschlossene Mengen sind kompakt* ($\Longleftrightarrow \overline{B}_r(x)$ *kompakt für alle* $x \in M, r > 0$).

(ii) *Je zwei Punkte können durch eine minimale Geodätische verbunden werden.*

Beweis. zu i): Auf kleinen Mengen schätzen wir die Metrik mit der euklidischen Metrik ab; im euklidischen Raum gilt (i):
Für $x \in M$ gibt es ein $\epsilon_0 > 0$, so daß $\bar{B}_\epsilon(x)$ kompakt ist für alle $\epsilon \leq \epsilon_0$. (folgt aus dem Beweis von Satz 3.3). Sei ρ wie folgt definiert: $\rho := \sup\{r > 0 | \bar{B}_r(x) \text{ kompakt}\}$. $\rho > 0$ ist klar, und es gilt sogar $\rho = \infty$.
Nimm an, es sei $\rho < \infty$. Man muß ausnutzen, daß M vollständig ist.
Zu jeder Folge in $\bar{B}_r$ mit $r < \rho$ gibt es eine konvergente Teilfolge. Versuche jetzt, eine Folge in B_ρ in einen kleineren Ball zu stopfen: dort weiß man dann, daß man eine konvergente Teilfolge findet.
Sei also $(x_n)_n \subset \bar{B}_\rho(x)$ eine beliebige Folge.
Wenn $d(x, x_n) \not\to \rho$ $(n \to \infty)$, dann gibt es ein $r < \rho$ mit $(x_n) \subset \bar{B}_r(x)$; dieser Ball ist kompakt, d.h. es gibt eine konvergente Teilfolge. Nimm also an, $d(x, x_n) \to \rho$ $(n \to \infty)$.
Sei $k \in \mathbb{N}$. Zu x_n gibt es nach Lemma 3.9 ein y_n^k mit folgenden Eigenschaften:

(a) $d(x_n, y_n^k) < \frac{1}{k}$

(b) $d(x, y_n^k) \leq \rho - \frac{1}{2k}$.

Die $(y_n^k)_n$ liegen in den kompakten Bällen $\bar{B}_{\rho-1/2k}(x)$, also hat man konvergente Teilfolgen. Diagonalargumentation (Cantor) liefert: Es gibt eine Folge $(n_\ell)_\ell$ so, daß für jedes $k \geq 1$ die Folge $(y_{n_\ell}^k)_\ell$ konvergiert.
Behauptung: $(x_{n_\ell})_\ell$ ist Cauchy–Folge. Zu $k > 0$ wähle ℓ_0 so, daß $d(y_{n_\ell}^k, y_{n_m}^k) < \frac{1}{k}$ $\forall m, \ell \geq \ell_0$. Dann ist

$$d(x_{n_\ell}, x_{n_m}) \leq d(x_{n_\ell}, y_{n_\ell}^k) + d(y_{n_\ell}^k, y_{n_m}^k) + d(y_{n_m}^k, x_{n_m}) \leq \frac{3}{k}$$

für $\ell, m \geq \ell_0$. Also ist (x_{n_ℓ}) Cauchyfolge und damit konvergent. Dann ist aber $\bar{B}_\rho(x)$ kompakt.
Überdecke $\bar{B}_\rho(x)$ mit endlich vielen relativ kompakten Bällen U_i (also $\bar{U}_i$ ist kompakt), das geht, da M parakompakt ist und damit jeder Punkt eine kompakte Umgebung hat.
$\bigcup_{i=1}^m \bar{U}_i$ ist kompakte Umgebung von $\bar{B}_\rho(x)$ und enthält eine offene Überdeckung von $\bar{B}_\rho(x)$. Es gibt daher $\epsilon > 0$, so daß $\bar{B}_{\rho+\epsilon}(x) \subset \bigcup_{i=1}^m \bar{U}_i$ ist. Das ist eine abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Menge und somit kompakt. Dies ist ein Widerspruch zur Definition von ρ.
Damit ist aber $\rho = \infty$.
Zu ii): Wähle $x, y \in M, d(x, y) = R$. Ist $c : [0, b] \to M$ eine Kurve von x nach y mit $\ell(c) \leq R + 1$, dann liegt c im kompakten Ball $\bar{B}_{R+1}(x)$. Wähle $c_i : [0, 1] \to M$ nach der Bogenlänge parametrisiert ($\|c_i'(t)\| =$ const), $\ell(c_i) \leq d(x, y) + \frac{1}{i}$. Daher sind die c_i gleichgradig stetig, und ihr Bild liegt in einer kompakten Menge: $c_i([0, 1]) \subset \bar{B}_{R+1}(x)$ für alle i und nach *Arzela–Ascoli* gibt es eine gleichmäßig konvergente Teilfolge. Die Grenzkurve ist stetig, $c : x \to y$, und $\ell(c) \leq \liminf_{i\to\infty}(c_i) \leq d(x, y)$ (s.a. Lemma 1.9). Damit ist aber $\ell(c) = d(x, y)$, der Abstand ist minimal, und c ist Geodätische. □

Ist $c : I \to \mathbb{R}^n$ Geodätische, dann ist $c'' = 0$ und umgekehrt. Das ist natürlich ein ganz nettes Kriterium! In $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ sind Geodätische Großkreise. Also ist $c : I \to S^2 \subset \mathbb{R}^3$ ist Geodätische genau dann, wenn in geeigneten Koordinaten $c(t) = (\sin \alpha t, \cos \alpha t, 0)$ (Ausschnitte von Großkreisen.) Damit gilt

$$\begin{aligned} c'(t) &= (\alpha \cos \alpha t, -\alpha \sin \alpha t, 0) \\ c''(t) &= (-\alpha^2 \sin \alpha t, -\alpha^2 \cos \alpha t, 0) = -\alpha^2 c(t) \ . \end{aligned}$$

Die 2. Ableitung ist parallel zu $c(t)$ und steht senkrecht auf dem Tangentialraum der Sphäre; $c''(t) \perp T_{c(t)}S^2$. Hier betrachten wir ja die eingebettete Sphäre, im Allgemeinen macht der Begriff „senkrecht“

nicht so viel Sinn. Neuer Anlauf: Sei $E = S^2 \times \mathbb{R}^3$ das Tangentialbündel von $\mathbb{R}^3$ eingeschränkt auf S^2. TS^2 liegt als Unterbündel in E. Definiere die orthogonale Projektion $p : E \to TS^2$ (d.i. eine Bündelabbildung) durch

$$p_{|E_p} = \text{ orthogonale Projektion von } T_p\mathbb{R}^3 \text{ auf } T_pS^2$$

(T_pS^2 ist 2–dimensionaler Untervektorraum von E_p). Dann ist c Geodätische genau dann, wenn $p\big(c''(t)\big) = 0\ \forall t$. Die Tangenten $c'(t)$ an $c(t)$ beschreiben eine Kurve in TS^2, die man durch $\big(c(t), \alpha(t)\big) \in S^2 \times \mathbb{R}^3 = E$ mit einer Kurve $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ beschreiben kann. Genauso laßt sich dann $c''(t)$ schreiben als $\big(c(t), \alpha'(t)\big) \in S^2 \times \mathbb{R}^3$. Normalerweise wäre man längst mit c'' in TTS^2 gelandet. Um das zu verhindern, identifiziert man die zweite Komponente von TS^2, T_pS^2, mit $\mathbb{R}^3$.
Unter diesen Bedingungen haben wir wieder eine Geodätische, falls $c'' = 0$ ist.
Im allgemeinen Fall gibt es noch ein paar Schwierigkeiten mehr:
Sei $E \xrightarrow{\pi} M$ ein Vektorbündel. Wähle $U \subset M$ offen und eine lokale Trivialisierung auf $\pi^{-1}(U) \cong U \times \mathbb{R}^k$. Sei X ein Schnitt von E über U. Das kann repräsentiert werden in der Form

$$X(p) = \big(p, \alpha(p)\big)\ , \qquad \alpha : U \to \mathbb{R}^k\ .$$

Mit der Ableitung landet man wieder im Bündel, $\mathrm{D}\alpha$ ist ja eine Abbildung $\mathrm{D}\alpha : TU \to T\mathbb{R}^k \cong \mathbb{R}^k$, man kann also eine „Ableitung“ von X wie folgt definieren:

$$\nabla X(Y) = (p, \mathrm{D}\alpha\, Y)$$

mit $Y \in T_pU$. ∇X ist eine lineare Abbildung vom T_pU in $T_p\mathbb{R}^k$, dabei identifiziert man $T_p\mathbb{R}^k \simeq \mathbb{R}^k$. Diese „Ableitung“ hat verschieden spezielle Eigenschaften, die sich aus der Definition ergeben.

- $$\begin{aligned} \nabla X(\alpha Y + \beta Z) &= \alpha \nabla X(Y) + \beta \nabla X(Z) \\ &=: \alpha \nabla_Y(X) + \beta \nabla_Z(X) \qquad (\alpha, \beta \in \mathbb{R},\ Y, Z \in T_pU) \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} \nabla(fX + g\tilde{X})(Y) &= \nabla(fX)(Y) + \nabla(g(\tilde{X})(Y) \\ &= Df(Y)\cdot X + f\nabla_Y X + Dg(Y)\cdot \tilde{X} + g\nabla_Y \tilde{X} \end{aligned}$$

Der zweite Teil entspricht dabei der „Produktregel“ beim normalen Differenzieren.
Leider hängt diese Definition von der Trivialisierung ab; wegen des Differentials (Kettenregel) bekommt man für andere Trivialisierungen etwas anderes heraus. Nun ist aber ∇ eine Abbildung, die einem Schnitt X eine Abbildung $\mathrm{D}\alpha \in \mathrm{Hom}(TU, \mathbb{R}^k)$ zuordnet. Betrachtet man jetzt also das Vektorbündel $\tilde{E}$ überr U mit Faser $Hom(TU, \mathbb{R}^k)$, dann ordnet ∇ einem Schnitt von E über E einen Schnitt von $\tilde{E}$ über U zu.
Formalisierung folgt auf dem Fuße:

Definition 3.11. (i) Seien E, F Vektorbündel über M. Das *Tensorprodukt* $E^* \otimes F$ ist das Bündel mit Faser $\mathrm{Hom}(E_p, F_p)$ über p.

(ii) Eine Abbildung $\Phi : \Gamma(E) \to \Gamma(F)$ heißt *Tensorfeld*, falls Φ ein Schnitt von $E^* \otimes F$ ist, (d.h. es gibt einen Schnitt $\tilde{\Phi}$ von $E^* \otimes F$ so, daß

$$\Phi X(p) = \tilde{\Phi}\big(X(p)\big)$$

gilt. Gleichwertig hierzu ist, daß für jede Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ gilt:

$$\Phi(fX) = f\big(\Phi(X)\big)$$

(d.h. $\Phi(fX)(p) = f(p)\cdot\Phi(X)(p)$). ($f$ fungiert hier als Koeffizient; beim Auswerten bekommt man einen reellen Koeffizienten für die lineare Abbildung.) Wenn $X = \sum \alpha_i X^i$ für Trivialisierung X^i von E über offenem $U \subset M$ und $\Phi\big(f(Y)\big) = f\Phi(Y)$, dann ist $\Phi(X) = \sum \alpha_i \Phi(X^i)$.

(iii) $E^* \otimes F^* \otimes G$ ist das Bündel mit den Fasern (bilineare Abbildungen von $E_p \times F_p \to G_p$).

Definition 3.12. Sei $E \xrightarrow{\pi} M$ ein Vektorbündel über M. Ein *Zusammenhang* ∇ auf E ist eine Zuordnung, die einem Schnitt X des Bündels E einen Schnitt des Bündels $T^*M \otimes E$ zuordnet (das Bündel, dessen Faser über p der Raum der linearen Abbildungen $T_pM \to E_p$ ist, $T_pM \otimes E_p = \mathrm{Hom}(T_pM, E_p)$ und das Tensorprodukt von Bündeln ist fasernweise erklärt (s.a. Definition 3.11)), so daß gilt

(i) $\nabla(X+Y) = \nabla X + \nabla Y \quad (X, Y \in \Gamma(E) = \mathrm{VR}$ der differenzierbaren Schnitte von $E)$
(d.h. für $Z \in T_pM$ gilt $(\nabla(X+Y))(Z) =: \nabla_Z(X+Y) = \nabla_Z X + \nabla_Z Y$

(ii) $\nabla_{fZ_1+gZ_2}X = f\nabla_{Z_1}X + g\nabla_{Z_2}X$

(iii) Leibnitz-Regel: Für Funktionen $f : M \to \mathbb{R}$ gilt $\quad \nabla(fX) = \mathrm{D}f\cdot X + f\nabla X$
(d.h. für $Z \in T_pM$ gilt $\nabla_Z(fX)(p) = \underbrace{\underbrace{\mathrm{D}f(Z)}_{\in\mathbb{R}}\cdot\underbrace{\big(X(p)\big)}_{\in E_p} + \underbrace{f(p)}_{\in\mathbb{R}}\cdot\underbrace{\nabla_Z(X)}_{\in E_p}}_{\in E_p}$

Beispiel 3.13. Sei $M = S^2, E = TS^2$. Ein Schnitt X von TS^2 kann als Abbildung $\alpha : S^2 \to \mathbb{R}^3$ beschrieben werden, mit

$$\alpha(p) \in T_pS^2 \subset T_p\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^3$$

Das Differential $\mathrm{D}\alpha$ von α ist ein Schnitt von $T^*S^2 \otimes \mathbb{R}^3$. Sei $P : S^2 \times \mathbb{R}^3 \to TS^2$ die orthogonale Projektion (faserweise). Definiere $\nabla X = P \circ \mathrm{D}\alpha$. Dies definiert einen Zusammenhang, denn

$$\nabla X \in \Gamma(T^*S^2 \otimes TS^2) \text{ (Schnitt im Bündel } T^*S^2 \otimes TS^2 \text{ mit Faser } \mathrm{End}(T_pS^2) \text{ über } p)$$

$$\begin{aligned}
\nabla(fX + g\tilde{X}) &= P \circ (\mathrm{D}(f\alpha + g\tilde{\alpha})) \\
&= P \circ (\mathrm{D}f\cdot\alpha + f\cdot\mathrm{D}\alpha + \mathrm{D}g\cdot\tilde{\alpha} + g\cdot\mathrm{D}\tilde{\alpha}) \\
&= \mathrm{D}f\cdot\alpha + f\cdot P(\mathrm{D}\alpha) + \mathrm{D}g\cdot\tilde{\alpha} + g\cdot P(\mathrm{D}\tilde{\alpha}) \quad (P(\alpha) = \alpha) \\
&= \mathrm{D}fX + f\nabla X + \mathrm{D}g\tilde{X} + g\nabla\tilde{X}.
\end{aligned}$$

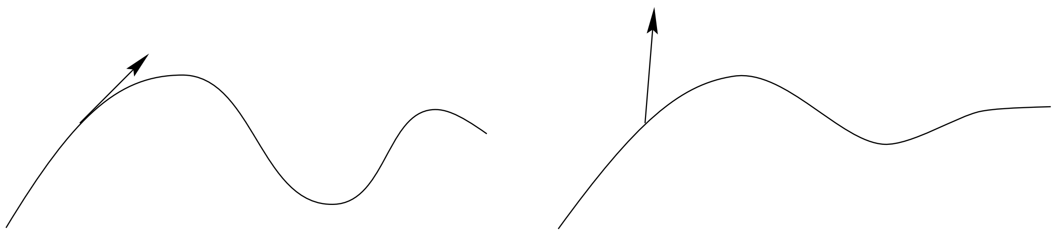
Wir müssen uns noch mit der Frage beschäftigen, ob es auch Sinn macht, Tangentialabbildungen wieder in den einfachen Tangentialraum zu verlegen. Eine vernünftige Forderung wäre noch: für $c : I \to \mathbb{R}^n$ gilt $c''(t) = \nabla X\big(c(t)\big)$, falls X Vektorfeld auf $\mathbb{R}^n$ mit $X\big(c(t)\big) = c'(t)$. (d.h. auf $\mathbb{R}^n$ „ist“ ∇ die normale Ableitung.)

Definition 3.14. Sei $E \xrightarrow{\pi} M$ ein Vektorbündel, $c : I \to M$ eine (glatte) Kurve. Ein *Schnitt von E über c* ist eine Abbildung $X : I \to E$ so, daß

$$X(t) \in E_{c(t)} \quad \forall t.$$

Satz 3.15. *Sei ∇ ein Zusammenhang auf dem Vektorbündel $E \xrightarrow{\pi} M$ und $c : I \to M$ eine Kurve. Dann induziert ∇ eindeutig eine Abbildung, die einem glatten Schnitt X von E über c einen Schnitt $\frac{\nabla}{\mathrm{d}t}X$ von E über c zuordnet, so daß gilt*

(i) $\frac{\nabla}{\mathrm{d}t}(X+Y) = \frac{\nabla}{\mathrm{d}t}X + \frac{\nabla}{\mathrm{d}t}Y$



(ii) $\frac{\nabla}{\mathrm{d}t}(fX)(t) = \frac{\partial}{\partial t} f \cdot X(t) + f(t) \cdot \frac{\nabla}{\mathrm{d}t} X(t)$

(iii) *Ist Y ein Schnitt von E und gilt $X(t) = Y(c(t))$, dann gilt* $\frac{\nabla}{\mathrm{d}t} X = \nabla_{c'(t)} Y$.

(hier führt man so etwas wie eine partielle Ableitung mit Hilfe des Zusammenhangs ein, eine „zweite" Ableitung. X und Y sind „parallel".)

Beweis. (a) Wenn es eine solche Zuordnung gibt, so ist sie eindeutig:
Sei $Y^1, \ldots Y^k$ Trivialisierung von E über $U \supset c(I)$. Sei X Vektorfeld entlang c, dann ist $X(t) = \sum_{i=1}^k X^i(t) Y^i_{c(t)}$, dabei sind die $X^i : I \to \mathbb{R}$ Funktionen. Nach (i)–(iii) gilt:

$$(*) \qquad \frac{\nabla}{dt} X(t) = \sum_{i=1}^{k} \left(X^{i\prime}(t)\, Y^i_{c(t)} + X^i(t) \cdot \nabla_{c'(t)} Y^i \right) .$$

Diese Darstellung ist eindeutig, denn sie ergeben sich aus den geforderten Eigenschaften. $\frac{\nabla}{dt}$ ist also eindeutig bestimmt.

(b) $(*)$ definiert auch eine solche Abbildung, also ist auch die Existenz klar. (Da ∇ nicht nur lokal definiert ist, ist auch dies global gültig.)

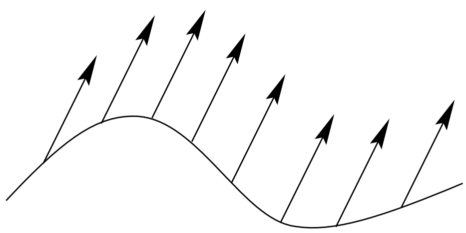
□

$\frac{\nabla}{dt}$ heißt *kovariante Ableitung* von X.
(Auf „vernünftigen" Mannigfaltigkeiten ist das die 2. Ableitung auf den Tangentialraum projiziert (s.a. das Beispiel mit S^2.) *Geodätische haben* $\frac{\nabla}{dt} \equiv 0$

Definition 3.16. Eine Vektorfeld X entlang c heißt *parallel*, falls $\frac{\nabla}{\mathrm{d}t} X \equiv 0$.

Beispiel 3.17. Sei c eine Kurve in $\mathbb{R}^n$, X parallel entlang c (bzgl. des kanonischen Zusammenhangs, der durch Differentiation entsteht), also $X(t) = (c(t), \alpha(t))$ mit $\alpha(t) \in \mathbb{R}^n$. Die kovariante Ableitung sieht dann so aus:

$$0 \equiv \tfrac{\nabla}{\mathrm{d}t} X(t) = \left(c(t), \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\alpha(t)\right) \quad \text{(Nullvektor im Tangentialbündel)}$$
$$\Longrightarrow \alpha \text{ ist konstant.}$$



Satz 3.18. *Sei $c : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ eine glatte Kurve und ∇ ein Zusammenhang in E, $X_0 \in E_{c(0)}$. Dann gibt es genau einen parallelen Schnitt X von E über c mit $X(0) = X_0$.*
Bezeichnung: $X(t) = ||_t(X_0)$
Die Zuordnung $X_0 \to ||_t X_0 \in E_{c(t)}$ ist linearer Isomorphismus von $E_{c(0)}$ auf $E_{c(t)}$.

(Das heißt, mit der Kurve und der Anfangsrichtung ist ein paralleler Schnitt festgelegt.)

Beweis. Aus der Bestimmungsgleichung $(*)$ aus dem Beweis von Satz 3.15 für $\frac{\nabla}{dt}$ bekommt man durch $\frac{\nabla}{dt} \equiv 0$ eine Differentialgleichung (lineare gewöhnliche DGL 1. Ordnung) für die X^i. Wähle also eine Trivialisierung $Y^1 \dots Y^k$ von E über $U \supset c\big((-\epsilon, \epsilon)\big)$. Das geht *lokal* und wir können schreiben $\nabla_{c'(t)} Y^i = \sum_j y^i_j Y^j_{c(t)}$ wobei $y^i_j : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}$ glatte Funktionen sind. Also ist X entlang c parallel genau dann, wenn $X = \sum_{i=1}^k X^i(t) Y^i_{c(t)}$ mit $\frac{\nabla}{dt} X = \sum_{i=1}^k \big[X^{i\prime}(t) + \sum_j X^j(t) y^j_i(t)\big] Y^i(t) \overset{!}{=} 0$ Dann muß, da die Y^i linear unabhängig sind, jeder Koeffizient 0 sein, und $X(t) = \sum X^i(t) Y^i_{c(t)}$ muß die Differentialgleichungen

$$X^{i\prime}(t) + \sum_j X^j(t) y^j_i(t) = 0$$

erfüllen. Anders gesagt: $(X_1, \dots, X_k)$ ist eine vektorwertige Funktion auf I und erfüllt

$$\begin{pmatrix} X_1' \\ \vdots \\ X_k' \end{pmatrix} = \left(y^j_i\right)_{i,j} \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_k \end{pmatrix}$$

Das kann man aber für jede Anfangsbedingung eingeutig lösen (lineare DGL). □

Erinnerung: $E \xrightarrow{\pi} M$ Vektorbündel über M, E k–dimensional. Ein Zusammenhang ist so etwas wie eine Ableitung von Schnitten.

$$\nabla : \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(T^*M \otimes E)$$

- ∇ linear
- Tensoriell in der 1. Komponente von $T^*M \otimes E$
- Leibnizregel

Bezüglich einer Trivialisierung von E entspricht ∇ einer Differentiation von Abbildungen $M \supset U \to \mathbb{R}^k$. Eine andere lokale Darstellung von ∇ auf U unterscheidet sich durch die Übergangsfunktion $U \to GL_k(\mathbb{R})$. Die Differenz zweier Zusammenhänge ist ein Tensorfeld.

Bemerkung. Wegen der Leibnizregel ist ein Zusammenhang ∇ *kein* Tensorfeld.

Lemma 3.19. (i) *Sei $E \xrightarrow{\pi} M$ ein Vektorbündel mit 2 Zusammenhängen ∇ und ∇'. Dann ist*

$$\nabla - \nabla' : \Gamma(E) \to \Gamma(T^*M \otimes E)$$

ein Tensorfeld.

(ii) *Ist ∇ ein Zusammenhang und $A \in \Gamma(T^*M \otimes E^* \otimes E)$ ein Tensorfeld, dann ist $\nabla + A$ auch ein Zusammenhang.*

Beweis. zu i) Zu zeigen: Für glatte Funktionen $f : M \to \mathbb{R}$ gilt $\nabla fX - \nabla' fX = f(\nabla - \nabla')X$, wobei X Schnitt von E ist ($X \in \Gamma(E)$), und zwar nach Leibniz:

$$\begin{aligned} \nabla fX - \nabla' fX &= f\nabla X + DfX - f\nabla' X - DfX \\ &= f(\nabla - \nabla')X \end{aligned}$$

zu ii): Sei ∇ Zusammenhang $A \in \Gamma(T^*M \otimes E^* \otimes E)$. $\nabla + A : \Gamma(E) \to \Gamma(T^*M \otimes E)$ ist als Summe linearer Funktionen linear, und es gilt:

$$\begin{aligned}(\nabla + A)(fX) = \nabla fX + AfX &= f\nabla X + DfX + fAX \\ &= f(\nabla + A)(X) + Df \cdot X\end{aligned}$$

Damit ist die Leibniz–Regel bewiesen. □

Im allgemeinen ist die Summe zweier Zusammenhänge *kein* Zusammenhang, aber wenn man (analog zur Zerlegung der 1) eine „geschickte" Summe (z.B. Konvexkombination) bildet, dann kann es funktionieren. Dann kann man sie auch „verkleben"; für Riemannsche Mannigfaltigkeiten können wir nicht beliebig viele Zusammenhänge gebrauchen.

Lemma 3.20. *Seien ∇, ∇' Zusammenhänge auf E und $f, g : M \to [0,1]$ Funktionen mit $f(p) + g(p) = 1$ für alle p. Dann ist $f \cdot \nabla + g \cdot \nabla'$ ein Zusammenhang.*

Beweis. Leibniz verifizieren:

$$\begin{aligned}(f\nabla + g\nabla')(\alpha X) &= \alpha(f\nabla + g\nabla')X + f\mathrm{D}\alpha \cdot X + g\mathrm{D}\alpha \cdot X \\ &= \alpha(f\nabla + g\nabla')X + (f+g)\mathrm{D}\alpha(X) \\ &= \alpha(f\nabla + g\nabla')X + \mathrm{D}\alpha(X)\end{aligned}$$

□

Bemerkung. Auf jedem Vektorbündel gibt es Zusammenhänge.

Beweis. 1) Wähle eine lokal endliche Überdeckung $\{U_i\}$ von U so, daß für alle i E eine Trivialisierung auf U_i hat.
2) (Auf jeder Trivialisierung wähle einen Zusammenhang; das geht wegen des Differentials auf TU_i).
Auf $\pi^{-1}(U_i) \cong U_i \times \mathbb{R}^k$ wähle den Zusammenhang wie folgt:
Fasse den Schnitt von E über U_i als Abbildung $U_i \to \mathbb{R}^k$ auf; wähle $\nabla_i X = DX$.
3) Wähle eine $\mathcal{U}$ subordinierte Partition der 1 $\{\varphi_i\}$. Setze $\nabla = \sum_i \varphi_i \nabla_i$.
Das sind lokal endlich viele (daraus folgt die Konvergenz), und da $\sum_i \varphi_i = 1$ ist, ist ∇ ein Zusammenhang. □

Bemerkung. Der euklidische Zusammenhang ∇_E in $\mathbb{R}^n$ ist das Differential. Fasse ein Vektorfeld auf $\mathbb{R}^n$ als Abbildung $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ auf (bzgl. Standardtrivialisierungen). $X \mapsto DX$ beschreibt einen Zusammenhang.
Geodätische (sind Geraden) genau dann, wenn die zweite Ableitung verschwindet, das heißt, wenn $\frac{\nabla_E}{dt} c'(t) = 0$.
Eigenschaften: Sind X, Y Vektorfelder entlang c, $X(t), Y(t) \in T_{c(t)}\mathbb{R}^n$, dann ist

$$\frac{d}{dt}\langle X(t), Y(t)\rangle = \left\langle \frac{\nabla_E}{dt}X(t), Y(t)\right\rangle + \left\langle X(t), \frac{\nabla_E}{dt}Y(t)\right\rangle$$

Auf diese Weise hat der Zusammenhang etwas mit Riemannschen Metriken zu tun.

Formalisierung:

Definition 3.21. Sei $E \xrightarrow{\pi} M$ ein Vektorbündel mit der Riemannschen Metrik g. Ein Zusammenhang ∇ heißt *Riemannsch*, falls für $X \in T_pM$, $Y, Z \in \Gamma(E)$ gilt:

$$Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z).$$

Bemerkung. Das innere Produkt zweier Schnitte gibt eine Funktion auf M, diese kann man (in p) „nach X ableiten“. Für $f \in C^\infty(M)$ ist $Xf := \left(\frac{df\left(c(t)\right)}{dt}\right)_{|t_0}$ mit $c'(t_0) = X, c(t_0) = p$. Mit anderen Worten, Xf ist die Ableitung von f in Richtung der Kurve $c(t)$ in $t = t_0$. Man kann auch allgemein einen Tangentialvektor so beschreiben. Betrachte den Raum der glatten Funktionen $C^\infty(M)$ auf M. Zwei Funktionen um $p \in M$ seien äquivalent, wenn sie auf einer Umgebung von p übereinstimmen. Die Äquivlenzklassen heißen dann *Keime differenzierbarer Funktionen*. Die Menge dieser Keime bezeichnet man mir $\mathcal{E}_p(M)$. Dann kann man einen Tangentialvektor an M in p auffassen als lineare Abbildung

$$X : \mathcal{E}_p(M) \to \mathbb{R} ,$$

welcher für alle $f, g \in \mathcal{E}_p(M)$ die Produktregel

$$X(f \cdot g) = X(f) \cdot g(p) + f(p) \cdot X(g)$$

erfüllt. Diese Abbildungen nennen wir *Derivationen*. Der Vektorraum dieser Derivationen heißt dann *Tangentialraum* von M bei p. Man kann zeigen, daß diese Definition mit der unsrigen übereinstimmt (s. z.B. ??).
Es ist $\nabla_X Y \in E_p, Z \in \Gamma(E)$; man kann beide in p auswerten. Der euklidische Zusammenhang erfüllt die Bedingung übrigens nach der vorangegangenen Bemerkung.

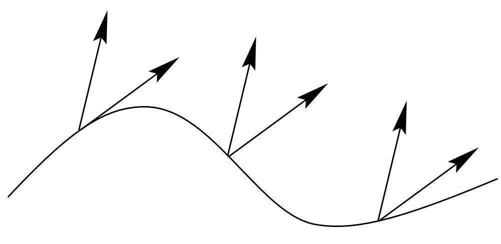
Beispiel 3.22. Sei $M^n \subset \mathbb{R}^k$ eine Untermannigfaltigkeit. $\nabla := P \circ D$. Fasse also das Vektorfeld X auf M als Abbildung $X : M \to \mathbb{R}^k$ auf (via $T\mathbb{R}^k \cong \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k$).

$$\begin{aligned} &DX : \text{ Schnitt von } T^*M \otimes \mathbb{R}^k \\ &P : T\mathbb{R}^k_{\ |M} \to TM \text{ orthogonale Projektion (bzgl. } \langle \cdot, \cdot \rangle) \end{aligned}$$

Für Vektorfelder X, Y, Z auf M gilt

$$\begin{aligned} X\langle Y, Z\rangle &= \langle \mathrm{D}Y(X), Z\rangle + \langle Y, \mathrm{D}Z(X)\rangle \\ &= \langle P \circ \mathrm{D}Y(X), Z\rangle + \langle Y, P \circ \mathrm{D}Z(X)\rangle \\ &= \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle \end{aligned}$$

Frage: Wie ändert sich das innere Produkt unter Parallelverschiebung entlang einer Kurve? Im $\mathbb{R}^n$ gar



nicht, weil parallele Vektorfelder Konstanten Abbildungen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ entsprechen. Mit Riemannschen Metriken ist das schwieriger.

Satz 3.23. *Eine Zusammenhang ∇ auf (E, g) ist genau dann Riemannsch, wenn gilt:*
Für jede Kurve c in M ist die Parallelverschiebung von $E_{c(0)}$ nach $E_{c(1)}$ eine lineare Isometrie bzgl. g.

Beweis. (1) Sei ∇ Riemannsch. Dann gilt für parallele Vektorfelder X, Y entlang c:

$$\tfrac{d}{dt} g\big(X(t), Y(t)\big) = g\Big(\underbrace{\tfrac{\nabla}{dt} X(t)}_{=0}, Y(t)\Big) + g\Big(X(t), \underbrace{\tfrac{\nabla}{dt} Y(t)}_{=0}\Big) = 0 \ ,$$

denn X, Y parallel, also $\frac{\nabla}{dt} X = \frac{\nabla}{dt} Y = 0$.
Also muß $g(X, Y) \equiv \mathrm{const}$ sein, also

$$g\big(X(t), Y(t)\big) = g\big(X(0), Y(0)\big) \ \forall t \ .$$

(2) Ist $g \equiv \mathrm{const}$ für parallele Vektorfelder entlang von Kurven, erhält also Parallelverschiebung das innere Produkt, dann gilt für $X \in TM$, $c: I \to M$ mit $c'(0) = X$ und für Schnitte Y, Z von E dargestellt als

$$Y\big(c(t)\big) = \sum Y^i(t)\xi_i(t) \ , \quad Z\big(c(t)\big) = \sum Z^i(t)\xi_i(t)$$

wobei die ξ_i linear unabhängige parallele Schnitte von E entlang c sind, daß

$$\begin{aligned}
X\, g(Y, Z) &= \frac{d}{dt} g\left(\sum Y^i \xi_i, \sum Z^j \xi_j\right) = \frac{d}{dt} \sum_{i,j} Y^i Z^j g(\xi_i, xi_j) \\
&= g\left(\sum Y^{i\prime} \xi_i, \sum Z^j \xi_j\right) + g\left(\sum Y^i \xi_i, \sum Z^{j\prime} \xi_j\right) \\
&\qquad \text{wegen Invarianz kann man } \frac{d}{dt} \text{ hineinziehen} \\
&= g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) \ .
\end{aligned}$$

$\square$

Beispiel 3.24. Die Menge $H^3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ & 1 & y \\ & & 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, x, y, z \in \mathbb{R}^3 \right\}$ heißt *3–dimensionale Heisenberggruppe* oder auch die Gruppe *Nil*.

H^3 ist diffeomorph zu $\mathbb{R}^3$ via $\quad (x, y, z) \mapsto \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ & 1 & y \\ & & 1 \end{pmatrix}$ und damit Mannigfaltigkeit.

H^3 ist (bzgl. der Matrizenmultiplikation) eine (nicht–abelsche) Gruppe, denn

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & z_1 \\ & 1 & y_1 \\ & & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & x_2 & z_2 \\ & 1 & y_2 \\ & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 + x_2 & z_1 + z_2 + x_1 y_2 \\ & 1 & y_1 + y_2 \\ & & 1 \end{pmatrix} .$$

Die Addition läuft hier ein bißchen anders als in $\mathbb{R}^3$! Identifiziere $H^3 \sim \big(\mathbb{R}^3, (\cdot)_H\big)$.
Für festes $A \in H^3$ ist $L_A(B) := A \cdot B$ ein Diffeomorphismus (bijektiv: Umkehrabbildung mittels A^{-1}, differenzierbar, da Polynomausdruck in den Koeffizienten). Es gilt

$$L_A(\mathrm{Id}) = A.$$

$\mathrm{D}L_{A|\mathrm{Id}}$ ist also ein linearer Isomorphismus von $T_{\mathrm{Id}} H^3$ auf $T_A H^3$, dabei werden Basen in Basen abgebildet. Sei X_0^1, X_0^2, X_0^3 eine Basis von $T_{\mathrm{Id}} H^3$, dann definiert dies eine Trivialisierung von TH^3 wie folgt: Definiere Vektorfelder X^i auf H^3 durch

$$X^i(A) := \mathrm{D}L_A(X_0^i).$$

Dann bilden X^1, X^2, X^3 eine Basis von TH^3 wegen der Eigenschaften von $\mathrm{D}L_A$. Man kann z.B. die Metrik mit dieser Trivialisierung auf ganz H^3 herumschieben. Sei g_0 Skalarprodukt in $T_{\mathrm{Id}}H^3$ so daß X^1, X^2, X^3 g_0–orthonormal sind. Wähle

$$X_0^1 = \frac{\partial}{\partial x}_{|\mathrm{Id}}, \quad X_0^2 = \frac{\partial}{\partial y}_{|\mathrm{Id}}, \quad X_0^3 = \frac{\partial}{\partial z}_{|\mathrm{Id}},$$

und definiere g_A so, daß $X^1(A), X^2(A), X^3(A)$ g_A–orthonormal sind. (Die Metrik ist durch die Basis ja eindeutig bestimmt.)
Definiere Zusammenhang ∇ auf TH^3 durch

$$\nabla X^i \equiv 0 \quad (i = 1, 2, 3)$$

das heißt für ein beliebiges Vektorfeld $X = \sum_{i=1}^3 a_i X^i$ gilt $\nabla X = \sum_{i=1}^3 \mathrm{D}a_i X^i$, die Glieder mit den ∇X^i fallen mit der Leibnizregel ja weg. Soweit sieht das aus wie im $\mathbb{R}^3$, auch im Euklidischen ist der Zusammenhang auf den Basis–Vektorfeldern $\equiv 0$. Die Multipliklation läuft hier aber anders, ebenso unterscheider sich die Metrik. Man kann auch die Geodätischen nicht so leicht sehen.

Berechnung der Vektorfelder X^1, X^2, X^3 in Koordinaten (x, y, z):

$$\begin{array}{rclclcl}
X^1(x,y,z) & = & \frac{d}{dt}(x,y,z)(t,0,0) & = & \frac{d}{dt}(x+t,y,z) & = & \frac{\partial}{\partial x}(x,y,z) \\
X^2(x,y,z) & = & \frac{d}{dt}(x,y,z)(0,t,0) & = & \frac{d}{dt}(x,y+t,z+xt) & = & \frac{\partial}{\partial y}(x,y,z) + x \cdot \frac{\partial}{\partial z}(x,y,z) \\
X^3(x,y,z) & = & \frac{d}{dt}(x,y,z)(0,0,t) & = & \frac{d}{dt}(x,y,z+t) & = & \frac{\partial}{\partial z}(x,y,z)
\end{array}$$

Die erste und die dritte Komponente sehen aus wie in $\mathbb{R}^n$, nur die zweite sieht wegen der anderen Multiplikation anders aus. Hier kann man die partiellen Ableitungen also nicht vertauschen. Also: Für Funktionen f auf H^3 gilt

$$X^1\big(X^2(f)\big) - X^2\big(X^1(f)\big) = \frac{\partial}{\partial z} f$$

Bemerkung. ∇ ist nicht torsionsfrei (s.a. Lemma 3.26).

Definition 3.25. Seien X, Y Vektorfelder auf M. Die *Lieklammer* $[X, Y]$ ist das durch

$$[X,Y](f) := X\big(Y(f)\big) - Y\big(X(f)\big)$$

definierte Vektorfeld.

Lemma 3.26. (i) $[X, Y]$ *ist ein Vektorfeld*
(ii) *Für* $f : M \to \mathbb{R}^n$ *gilt* $\quad [fX, Y] = f[X, Y] - Y(f) \cdot X = -[Y, fX]$
(iii) $\big[X, [Y, Z]\big] + \big[Y, [Z, X]\big] + \big[Z, [X, Y]\big] = 0 \quad$ *(Jacobi - Identität)*

Beweis. In lokalen Koordinaten schreibe

$$X = \sum_i \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i}\ , \qquad Y = \sum_j \beta_j \frac{\partial}{\partial X_j}\ .$$

Für eine Funktion f gilt

$$\begin{aligned}
X\big(Y(f)\big) - Y\big(X(f)\big) &= \sum_i \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_j \beta_j \frac{\partial}{\partial x_j} f\right) - \sum_j \beta_j \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sum_i \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i} f\right) \\
&= \sum_{ij} \alpha_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\beta_j\right)\left(\frac{\partial}{\partial x_j} f\right) - \sum_{ij} \beta_j \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\alpha_i\right)\left(\frac{\partial}{\partial x_i} f\right) \\
&= \sum_j \underbrace{\left[\sum_i \left(\alpha_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\beta_j\right) - \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\alpha_j\right)\beta_j\right)\right]}_{\text{Koeffizienten}} \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} f}_{\text{Basiselemente}}
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow [X,Y]$ ist Vektorfeld. □

Auf H^3 gilt:

$$\underbrace{\nabla_{X_1} X^2}_{=0} - \underbrace{\nabla_{X_2} X^1}_{=0} - \underbrace{[X^1, X^2]}_{\neq 0} \neq 0$$

wegen $\nabla X^i \equiv 0$ auf H^3 nach Definition.
Im $\mathbb{R}^3$ gilt für Vektorfelder Y^1, Y^2:

$$\nabla_{Y^1} Y^2 - \nabla_{Y^2} Y^1 - \underbrace{[Y^1, Y^2]}_{=0} = 0 \ ,$$

da die partiellen Ableitungen in Richtung paralleler Vektorfelder hier vertauschbar sind.

Lemma 3.27. *Für jeden Zusammenhang ∇ auf TM ist für $X, Y \in \Gamma(M)$ durch*

$$T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$$

ein Tensorfeld definiert (d.h. T ist ein Schnitt des Bündels über M, dessen Faser über p aus bilinearen Abbildung $T_pM \times T_pM \to T_pM$ besteht). T heißt Torsion *von ∇.*

Beweis. z.z.: $T(fX,Y) = -T(Y,fX) = fT(X,Y)$ für $f: M \to \mathbb{R}$. Aber es gilt:

$$\begin{aligned}
T(fX,Y) &\overset{def}{=} \nabla_{fX} Y - \nabla_Y fX - [fX, Y] \\
&= f(\nabla_X Y) - f(\nabla_Y X) - \mathrm{D}f(Y)(X) - f[X,Y] + \mathrm{D}f(Y)(X) \\
&= f\big(\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]\big) \ .
\end{aligned}$$

Den Rest der Identitäten erhält man aus den Eigenschaften der Lie–Klammer und des Zusammenhangs. □

Wie man am Beispiel des $\mathbb{R}^n$ einsieht, ist es ganz nützlich, einen torsionsfreien Zusammenhang ∇ zu haben.

Satz 3.28. *Ein Zusammenhang ∇ auf TM heißt* torsionsfrei, *falls $T \equiv 0$. Jede Riemannsche Metrik g auf M bestimmt einen eindeutig bestimmten torsionsfreien Riemannschen Zusammenhang, den* Levi-Civita-Zusammenhang.

Beweis. Nimm an, ∇ sei torsionsfrei und Riemannsch. Seien $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$. Dann gilt (nach Def. „Riemannsch")

(i) $X\, g(Y,Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$
(ii) $Y\, g(Z,X) = g(\nabla_Y Z, X) + g(Z, \nabla_Y X)$

(iii) $Z\,g(X,Y) = g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y)$

Betrachte (1) + (2) − (3):

$$X\,g(Y,Z) + Y\,g(Z,X) - Z\,g(X,Y) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) + \underbrace{g(Z, \nabla_Y X)}_{=g(Z,\nabla_X Y - [X,Y])} + g(\nabla_Y Z, X)$$
$$\underbrace{- g(Y, \nabla_Z X)}_{\overset{T\equiv 0}{=} g(Y,[X,Z])} \qquad \underbrace{- g(\nabla_Z Y, X)}_{=g([Y,Z],X)}$$

woraus folgt

$$(*) \qquad \begin{aligned} 2g(\nabla_X Y, Z) &= X\,g(Y,Z) + Y\,g(Z,X) - Z\,g(X,Y) \\ &\quad - g(X,[Y,Z]) + g(Z,[X,Y]) + g(Y,[Z,X]) \end{aligned}$$

Daraus folgt, wenn es einen solchen Zusammenhang gibt, dann ist er *eindeutig* durch $(*)$ bestimmt. *Existenz:* Wähle $(*)$ als Definitionsgleichung für ∇ und prüfe die Eigenschaften nach. □

Beispiel 3.29. Der Levi-Civita-Zusammenhang von $(\mathbb{R}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ist der euklidische Zusammenhang. Insbesondere ist c Geodätische in $(\mathbb{R}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ genau dann, wenn $\frac{\nabla}{dt}c' \equiv 0$. (Man zeigt das so, daß man „Variationen“ von c bildet, also homotope Kurven, die sich maximal um ϵ von c unterscheiden. Die Ableitungen der Parameterkurven minimiert man (über ϵ) und bekommt als kritischen Wert $\epsilon = 0$ heraus.)

Lemma 3.30. *Sei ∇ ein torsionsfreier Zusammenhang auf M. Sei $h : (-\epsilon,\epsilon) \times (-\epsilon,\epsilon) \to M$ eine glatte Homotopie von Kurven. Für festes $s \in (-\epsilon,\epsilon)$ ist die Zuordnung $t \mapsto \frac{\partial}{\partial s}\big(h(s,t)\big)$ ein Vektorfeld entlang der Kurve $h_s : t \mapsto h(s,t)$. (Jedem Punkt der Kurve ordnet man einen Vektor zu, nicht notwendig einen Tangentialvektor.)Es gilt:*

$$\frac{\nabla}{dt}\frac{\partial}{\partial s}h(s,t) = \frac{\nabla}{ds}\frac{\partial}{\partial t}h(s,t).$$

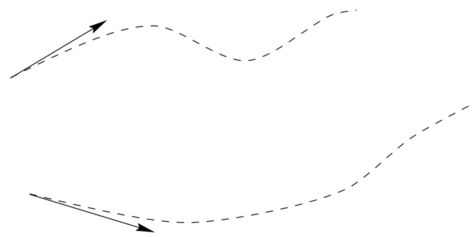
(Ableitungen sind vertauschbar.)

Beweis. Man rechnet das in lokalen Koordinaten aus: schreibe $h(s,t) = \big(h_1(s,t), \ldots, h_n(s,t)\big)$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial s}h(s,t) &= \sum_i \frac{\partial}{\partial s}h_i \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i}}_{\text{Basis des Tangentialraumes}} \\
\frac{\nabla}{dt}\frac{\partial}{\partial s}h(s,t) &= \sum_i \left[\left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial s}h_i\right)\frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial s}h_i \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}h}\frac{\partial}{\partial x_i}\right] \\
\frac{\nabla}{ds}\frac{\partial}{\partial t}h(s,t) &= \sum_j \left[\left(\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial}{\partial t}h_j\right)\frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial t}h_j \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}h}\frac{\partial}{\partial x_j}\right]
\end{aligned}$$

Differenzbildung: die ersten Teile fallen weg, da in $\mathbb{R}^n$ partielle Ableitung vertauschbar sind; für den Rest steht im Index ein Ausdruck mit $\frac{\partial}{\partial x_i} \cdot h_i$. Genauer:

$$\begin{aligned}
\sum_i \frac{\partial}{\partial s}h_i \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}h}\frac{\partial}{\partial x_i}\right) &= \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial s}h_i \frac{\partial}{\partial t}h_j \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}}\frac{\partial}{\partial x_i} \\
&= \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial s}h_i \frac{\partial}{\partial t}h_j \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}}\frac{\partial}{\partial x_j} \\
&= \sum_j \frac{\partial}{\partial t}h_j \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}h}\frac{\partial}{\partial x_j}\right)
\end{aligned}$$



denn $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_i} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j}$ da ∇ torsionsfrei und $\left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right] = 0$.
Also kommt insgesamt 0 heraus. $\square$

Der Zusammenhang hängt nur von der Riemannschen Metrik ab, also versucht man, Geodätische über den Zusammenhang zu definieren:

Definition 3.31. Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und ∇ der Levi–Cevita Zusammenhang. Eine Kurve $c : I \to M$ heißt *Geodätische*, falls

$$\frac{\nabla}{dt} c' = 0.$$

(Im Euklidischen ist das gleichwertig mit $c'' = 0$.)

Beispiel 3.32. (i) c Geodätische $\Longrightarrow$ c ist proportional zur Bogenlänge parametrisiert, denn

$$\tfrac{d}{dt} g\big(c'(t), c'(t)\big) \overset{\text{Def } \nabla}{=} 2g\left(\tfrac{\nabla}{dt} c'(t), c'(t)\right) = 0 \quad \Longrightarrow \quad g\big(c'(t), c'(t)\big) = \text{ const}$$

(ii) Sei $M \subset \mathbb{R}^k$ eine Untermannigfaltigkeit. Die Kurve $c : I \to M$ ist genau dann eine Geodätische, wenn

$$c'' \perp TM$$

(hier ist der Levi–Civita Zusammenhang „so etwas wie“ eine Abbildung $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ projiziert auf TM. Er ist auch torsionsfrei.) Also: Für die Sphäre $S^2 \subset R^3$ sind Geodätische im obigen Sinne lokal längenminimierend (denn das ist genau die Eigenschaft, die Geodätische = Großkreise dort hatten.)

Durch die Definition der Geodätischen hat man eine Differentialgleichung zweiter Ordnung für c. Im folgenden betrachtet man diese Differentialgleichung und ihre Lösungsmenge etwas genauer:

Satz 3.33. *Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann existiert zu $x \in M$ eine Umgebung U, so daß gilt:*

(i) *Zu $u \in U$, $X \in T_u M$ und $||X||_g < \epsilon$ (bzgl. Riemannscher Metrik) existiert eine eindeutig bestimmte Geodätische*

$$c_X : [-1, 1] \to M \text{ mit } c_X'(0) = X.$$

(ii) *Die Abbildung $\{X \in TU \mid ||X|| < \epsilon\} \times (-1, 1) \to M, (X, t) \mapsto c_X(t)$ ist differenzierbar.*

Situation: Durch einen Anfangsvektor (Richtung) ist die Geodätische eindeutig bestimmt:

Beweis. Wähle lokale Koordinaten, so daß sich ∇ schreiben läßt als

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\Gamma_{ij}^k}_{\in \mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial x_k}$$

(man kann Differentialgleichungen nur in $\mathbb{R}^n$ lösen und muß daher Koordinaten betrachten), wobei die Γ_{ij}^k, die sogenannten *Christoffel–Symbole*, differenzierbare reellwertige Funktionen sind, die beim Auswerten reelle Koeffizienten liefern.
Man erhält in Koordinaten auch:

$$\begin{aligned} c(t) &= \big(c_1(t), \ldots, c_n(t)\big) \\ c'(t) &= \big(c_1'(t), \ldots, c_n'(t)\big) \\ &= \sum_{i=1}^n c_i'(t) \frac{\partial}{\partial x_i}\big(c(t)\big) \quad \text{Basisdarstellung} . \end{aligned}$$

Damit:

$$\begin{aligned} \frac{\nabla}{dt} c'(t) &= \sum_{i=1}^n c_i''(t) \frac{\partial}{\partial x_i}\,\big(c(t)\big) + \sum_{i=1}^n c_i'(t)\, \nabla_{c'(t)} \frac{\partial}{\partial x_i} \\ &= \sum_{i=1}^n c_i''(t) \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{i,j} c_i'(t) c_j'(t) \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_i} \\ &= \sum_i \Big(c_i''(t) + \sum_{j,k} c_j'(t) c_k'(t)\, \Gamma_{jk}^i \Big) \frac{\partial}{\partial x_i} \overset{!}{=} 0 . \end{aligned}$$

Die Geodätischengleichung $\frac{\nabla}{dt} c' \overset{!}{=} 0$ in Koordinaten liefert also ein System von gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, woraus folgt, zu beliebigen Anfangsbedingungen erster Ordnung gibt es eine eindeutige Lösung. Man glaube: diese Lösung hängt differenzierbar von den Anfangsbedingungen ab.
Homogenität: Für $\lambda > 0$ gilt $c_{\lambda X}(t) = c_X(\lambda t)$, die Differentialgleichung ist homogen, d.h. wenn man eine Lösung für c_X gefunden hat, kann man λt in die obige Koordinatengleichung einsetzen und erhält nach ein paar Umformungen $c_{\lambda X}$.
Damit können schon gefundene Lösungen „skaliert" werden; hat man beispielsweise für $\|X\| \leq 1$ eine Lösung auf $[-\delta, \delta]$ gefunden, so erhält man eine Lösung auf $[-1, 1]$ für $\|X\| < \delta$. □

Definition 3.34. Die Abbildung $\exp : TM \to M$ heißt *Exponentialabbildung* auf M;

$$\exp(X) := c_X(1) .$$

Es folgt (s. oben)

$$\exp(tX) = c_X(t) .$$

Bemerkung. (a) exp ist eine differenzierbare Abbildung einer Umgebung Ω des Nullschnitts von TM in M.

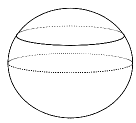
(b) Betrachte $(\pi, \exp) : \Omega \subset TM \to M \times M$, wobei $\pi : TM \to M$ die kanonische Projektion ist. Dann gilt für $X \in TM$ mit $\pi(X) = p$:

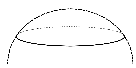
$$c_X(1) = q \iff (\pi, \exp)(X) = (p, q).$$

$\iff c_X$ ist Geodätische von p nach q.

Satz 3.35. (i) *Die Abbildung* $\exp : \Omega \to M$ *ist glatt.*

(ii) *Die Abbildung* $(\pi, \exp) : \Omega \to M \times M$ *ist auf dem Nullschnitt von* TM *mit maximalen Rang differenzierbar.*





Beweis. ii). Es genügt, beide Komponenten einzeln zu betrachten; haben beide die Eigenschaft (ii), dann auch $(\pi, \exp)$.
π: Sei $p \in M,\ 0 \in T_pM$. Der Tangentialraum in 0 kann als Summe $V \oplus H$ geschrieben werden, wobei V tangential zu T_pM ist und H komplementär. Wegen $V = \ker(d\pi)(0)$ hat $d\pi_{|H}$ auf H maximalen Rang.
exp: $\frac{d}{dt} \exp(tX)_{|t=0} = X \in T_pM$, da man die Tangente in 0 an die Geodätische c_X berechnet, das ist aber genau die Ausgangsrichtung. Daraus folgt, die Einschränkung von exp auf T_pM ist von maximalem Rang differenzierbar in 0. Das heißt, die Jacobimatrix von $(\pi, \exp)$ ist von der Form

$$\begin{pmatrix} d\pi_{|H} & 0 \\ ast & d\exp_{|T_pM} \end{pmatrix}$$

mit Gesamtrang $2n$. □

Korollar 3.36. *Zu $x \in M$ existiert eine Umgebung U und ein $\epsilon > 0$ so, daß*

(i) *Zu $p, q \in U$ existiert eine eindeutig bestimmte Geodätische von p nach q mit der Länge $\leq \epsilon$.*
(ii) *Die Geodätische hängt differenzierbar von $(p, q) \in U \times U$ ab.*

Beweis. Der Umkehrsatz liefert: Zu $x \in M$ existiert eine Umgebung Ω von $0 \in T_xM$ in TM so, daß $(\pi, \exp)$ auf Ω Diffeomorphismus auf eine Umgebung von (x, x) in $M \times M$ ist. Also gibt es zu $x \in M$ eine Umgebung U von x und $\epsilon > 0$ so: für $y \in U$ ist exp auf $B_y(0, \epsilon)$ vom Radius ϵ um $0 \in T_yM$ definiert und diffeomorph auf einer Umgebung $V \supset U$ von y. Außerdem gelte $\{Z \in T_yM |\ \|Z\| < \epsilon, y \in U\} \subset \Omega$ für die Umgebung Ω.
Also gibt es zu $p, q \in U$ genau ein $X \in T_pM$ mit $\|X\| \leq \epsilon,\ \exp(X) = q$, woraus folgt $t \mapsto \exp(tX)$ ist Geodätische der Länge $< \epsilon$ von p nach q. Da $\exp_{|B_p(0,\epsilon) \subset T_pM} : B_p(0, \epsilon) \to V \subset M$ Diffeomorphismus ist, ist sie auch eindeutig bestimmt. □

Beispiel 3.37. r ist Kleinkreis, man erreicht ihn durch Schnitt der Kugel mit einer Hyperebene parallel zur Tangentialebene im Nordpol.

Man erhält ihn aber auch, wenn man Geodätische vom Nordpol aus gleichlange laufen läßt: Sei also $S^2 \subset \mathbb{R}^3$. Definiere Polarkoordinaten (r, θ) auf T_pS^2 mit $p = (1, 0, 0)$ und wenn $\exp_p =$ Einschränkung von exp auf T_pS^2, $\exp_p := \exp_{|T_pS^2}$. Mit exp wandern die Koordinaten auf die Sphäre.

$$\exp_p(r,\theta) = (\cos r, \sin r \cos\theta, \sin r \sin\theta)$$

Die Geodätischen $r \to \exp_p(r,\theta)$, (θ fest) schneiden Kreise $\theta \to \exp_p(r,\theta)$ (r fest) orthogonal. Einziger Unterschied zur $\mathbb{R}^2$: die Länge der Kreise auf S^2 ist *nicht* die euklidische Länge in T_pS^2, z.B. wenn man bis π, also zum Antipodenpunkt, läuft, ist die Länge des resultierenden Parallelkreises 0.

Satz 3.38. *(Lemma von Gauß) Sei $p \in M, 0 \in U \subset T_pM, \exp_p : U \to \exp_p(U) = V \subset M$. Dann ist für jedes $v \in U$ die Geodätische $t \to \exp_p(tv)$ orthogonal zu den Hyperflächen $\exp_p\{w \mid ||w|| = ||v||\}$.*

Beweis. Sei $E \subset T_pM$ ein 2–dimensionaler Unterraum in T_pM. Führe auf E Polarkoordinaten (r,Θ) ein. Setze $\psi(r,\Theta) := \exp_p(r,\Theta)$.
(1) Für jedes feste Θ ist $\psi(t,\Theta)$ nach der Bogenlänge parametrisierte Geodätische.
(2) Zeige: Tangenten sind orthogonal, also $g\left(\frac{\partial}{\partial\Theta}\psi, \frac{\partial}{\partial r}\psi\right) \overset{!}{=} 0$.

$$\frac{d}{dr} g\left(\frac{\partial}{\partial\Theta}\psi, \frac{\partial}{\partial r}\psi\right) = g\left(\frac{\nabla}{dr}\frac{\partial}{\partial\Theta}\psi, \frac{\partial}{\partial r}\psi\right) + \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial\Theta}\psi, \frac{\nabla}{dr}\frac{\partial}{\partial r}\psi\right)}_{=0 \text{ Gedät.gl.}}$$

Da wegen Torsionsfreiheit Vertauschbarkeit der Ableitungen gegeben ist:

$$\begin{aligned}
&= g\left(\frac{\nabla}{d\Theta}\frac{\partial}{\partial r}\psi, \frac{\partial}{\partial r}\psi\right)\\
&= \tfrac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\Theta} g\left(\frac{\partial}{\partial r}\psi, \frac{\partial}{\partial r}\psi\right)\\
&= 0
\end{aligned}$$

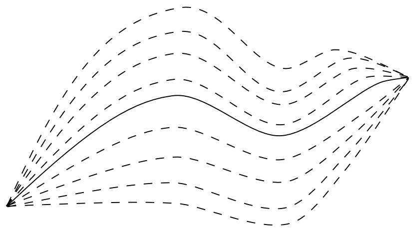
denn die Geodätische ist nach der Bogenlänge parametrisiert, also verschwindet die Ableitung. Also ist $g\left(\frac{\partial}{\partial r}\psi, \frac{\partial}{\partial\Theta}\psi\right)$ konstant entlang der Geodätischen $t \mapsto \psi(t,\Theta)$. Aber für $r \to 0$ verschwindet der Wert, damit ist man fertig, denn für $r = 0$ ist die Kurve $\Theta \to \Psi(0,\Theta)$ konstant. ☐

Man kann Tangenten an Kurven in der Tangentialebene in eine radiale und eine tangentiale Komponente zerlegen. Geodätische haben keine tangentiale Komponente, denn

Korollar 3.39. *Sei $p \in (M,g)$ und $\epsilon > 0$ so, daß $\exp_p$ auf dem Ball B von Radius ϵ definiert und ein Diffeomorphismus ist. Dann ist für jedes $v \in T_pM$ mit $||v|| < \epsilon$ die Kurve $t \to \exp_p(tv)$ $(t \in [0,1])$, die Geodätische mit Anfangsgeschindigkeit v, bis auf Umparametrisierung die eindeutig bestimmte kürzeste Kurve, die p mit $\exp_p v$ verbindet. Länge von $(t \to \exp_p tv) = ||v|| = \mathrm{dist}(\mathrm{p}, \exp_\mathrm{p} \mathrm{v})$.*

Beweis. Sei $c : [0,1] \to M$ eine Kurve mit $c(0) = p, c(1) = \exp_p v$. Schreibe $B = B_\epsilon(0) \subset T_pM$. Verläuft die Kurve ganz in $\exp_p B$, dann haben wir zur Verfügung, daß exp Diffeomorphismus ist. Es gibt also ein eindeutiges Urbild $\tilde{c}$ von c, $\tilde{c} : [0,1] \to B \subset T_pM$ mit $\tilde{c}(0) = 0, \tilde{c}(1) = v, \exp_p \tilde{c}(t) = c(t)$. In der radialen Richtung kennt man die Metrik, denn $\exp_{|\mathrm{Strahl}}$ ist Isometrie vom Strahl auf eine Geodätische in M (Geodätische werden auf Geodätische abgebildet). Das Problem sind noch die sphärischen Richtungen. Man kann zerlegen $\tilde{c}'(t) = A(t) + Y(t)$, wobei $A(t)$ tangential zu einer Geraden durch 0 ist (unter der Annahme, daß $c(t) \neq 0$ für $t \neq 0$, das ist vernünftig, denn sonst schneidet man den „Kringel" einfach ab, wobei die resultierende Kurve jedenfalls nicht länger wird). $Y(t)$ ist zur Sphäre $\{\omega \mid ||\omega|| = ||\tilde{c}(t)||\}$ tangential. Bezüglich der Metrik g auf M gilt wegen des Lemmas von Gauß:

$$g^*\big(A(t), Y(t)\big) = 0$$



(dabei ist g^* die mittels $\exp_p$ zurückgeholte Metrik auf M; man will ja im Endeffekt c und nicht $\tilde{c}$ betrachten). Daraus folgt

$$\begin{aligned}
\ell(\tilde{c}) &= \int_0^1 \Big\{ g^*\big(A(t)+Y(t), A(t)+Y(t)\big) \Big\}^{1/2} dt \\
&= \int_0^1 \Big\{ g^*\big(A(t), A(t)\big) \Big\}^{1/2} dt + \int_0^1 \Big\{ g^*\big(Y(t), Y(t)\big) \Big\}^{1/2} dt \\
&\geq \int_0^1 \|A(t)\| \; dt \quad \text{(radiale Richtung, hier kann man die euklid. Norm nehmen)} \\
&\geq \int_0^1 A(t)\, dt = \|v\|
\end{aligned}$$

(da A die radiale Ableitung ist, erhält man als Integral genau den Abstand $p \to v = \|v\|$). Gleichheit gilt genau dann, wenn der sphärische Teil verschwindet, d.h. wenn $Y(t) \equiv 0$. □

Hieraus folgt auch: Die Länge jeder Kurve $c : [0,1] \to M$, die nicht vollständig in $\exp_p B$ liegt, ist mindestens ϵ und damit größer als $\|v\|$ für $v \in B$.

Korollar 3.40. (i) *Die Kurve $c : I \to M$ ist genau dann Geodätische, wenn sie lokal minimal ist, d.h. wenn es zu $\tau \in I$ ein $\epsilon > 0$ gibt mit*

$$\begin{aligned}
\ell(c_{|[\tau-\epsilon,\tau+\epsilon]}) &= 2a\epsilon \qquad \textit{(a feste Konstante)} \\
&= \operatorname{dist}\big(c(\tau-\epsilon), c(\tau+\epsilon)\big) \; .
\end{aligned}$$

Das sind lokale Lösungen der Differentialgleichungen. Man muß die Differentialgleichungen aber auch unabhängig vom Zusammenhang ∇ bestimmen können; das hing ja nur von der Metrik ab. Ohne Zusammenhang erhält man die Euler–Lagrange–Gleichungen.

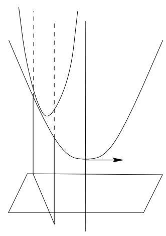
(ii) *Ist $c : [0,1] \to M$ Geodätische, dann ist c kritischer Punkt für das Energiefunktional $E : \gamma \to \frac{1}{2}\int_0^1 \|\gamma'(t)\|^2\, dt$ ($\|\cdot\|$ bzgl. Metrik auf M!) für Kurven $\gamma : [0,1] \to M$ mit $\gamma(0) = c(0)$ und $\gamma(1) = c(1)$.*

In Variationskurven einer Homotopie von γ, aufgefaßt als Variation von γ aus glatten Kurven mit festen Endpunkten kann man für jede Variationskurve die Energie ausrechnen.
Man erhält eine Variation der Energie. Minimiert man, so erhält man über $dE \stackrel{!}{=} 0$ die kritischen Punkte. Anders geschrieben:

$$i_{c''} dd_V L = 0 \qquad \text{Euler–Lagrange}$$

Dabei ist

- $L : TM \to \mathbb{R}\,, \qquad L(X) = \|X\|^2$



- d_V ist die vertikale Ableitung (man schränkt L auf einen T_pM ein. Das Differential dL von $L_{|T_pM}$ liefert eine 1–Form auf $T(T_pM)$. Identifiziert man $T(T_pM)$ mit T_pM, dann kann man die 1–Form d_V auf TM so darstellen:
  Wähle eine direkte Zerlegung $T_X(TM) = H \oplus V$ wobei V Tangentialraum von T_pM in $X \in T_pM$ (also $V = \ker d\pi(X), \pi : TM \to M$ kanonische Projektion) und $d\pi(X) : H \to T_pM$ Isomorphismus. H wird also (mittels $d\pi(X)$) mit T_pM und damit mit $V = T_x(T_pM)$ identifiziert. Also kann $d(L_{|T_pM})$ als lineares Funktional auf H aufgefaßt werden, das mit d_VL auf H übereinstimmt. Setzt man noch $D_VL_{|V} \equiv 0$, dann definiert dies ein lineares Funktional d_VL auf $T_X(TM)$, das unabhängig von der Wahl von H mit $H \oplus V = T_X(TM)$ ist und auf V identisch verschwindet.
- Durch Ableitung von d_V erhält man die 2–Form dd_V, eingesetzt werden solche Dinge wie $c'' \in T(TM)$.

Das ist zwar einfach geschrieben, aber recht unübersichtlich. Also führt man den Zusammenhang ∇ ein. Die beiden erhaltenen Differentialgleichungs–Systeme müssen übereinstimmen, aber ∇ ermöglicht es, den $T(TM)$ zu sparen.
In der Differentialgeometrie braucht man nur Situationen, in denen ∇ „ausreicht“. Andere Variationsprobleme kann man mit ∇ nicht rechnen, denn für ∇ braucht man eine Riemannsche Metrik, das ist schon eine ganz ordentliche Voraussetzung, die beileibe nicht immer gegeben ist. Hat man z.B. nur eine Norm, dann muß man Euler–Lagrange benutzen.

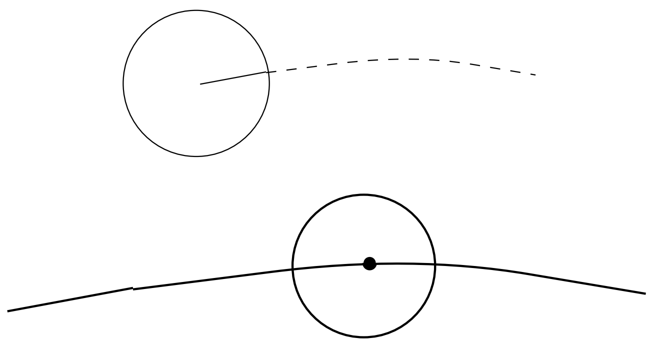
Beispiel 3.41. (i) $\mathbb{R}^n - \{0\}$

Diese Mannigfaltigkeit hat die Eigenschaft, daß 2 beliebige Punkte nicht unbedingt durch eine minimale Geodätische verbunden werden können.

(ii) $D \subset \mathbb{R}^n$ sei der offene Einheitsball in der euklidischen Metrik. D ist *euklidisch konvex*, d.h. je zwei Punkte können mit minimaler Geodätischen verbunden werden. ∂D ist nicht enthalten, exp ist nicht auf ganz TM definiert, woraus folgt D ist *nicht* vollständig.

(iii) D mit hyperbolischer Metrik. Wähle das Hyperboloid–Modell für $\mathbb{H}^2$.
Jede Ebene E durch $(1, 0, 0)$ und 0 schneidet H. Der Schnitt ist eine Kurve c. Die Senkrechte zum Hyperboloid, bezüglich des Lorentz–Skalarproduktes in Punkten von c liegt auch in der Schnittebene. Parametrisiert man c nach der Bogenlänge (bzgl. des Lorentz–Produktes), dann ist $c'' \in E$ und senkrecht auf c', also senkrecht zum Hyperboloid. Wie im Falle der Sphäre erkennt man hieraus, daß Geodätische Schnitte vom Hyperboloid mit 2–dimensionalen Unterräumen von $\mathbb{R}^{n+1}$ sind.
(Isometrien bilden Geodätische in Geodätische ab, und die Lorentzgruppe als Gruppe linearer Abbildungen bildet, die 2–dimensionale Unterräume auf 2–dimensionale Unterräume ab.
Insbesondere ist exp ist auf ganz TD definiert, und D ist vollständig.

Satz 3.42. *(Satz von Hopf–Rinow, vergl. Satz 3.10) (M, g) ist genau dann vollständig, wenn* exp *auf ganz TM definiert ist.*



Beweis. (i) Sei exp auf ganz TM definiert. Wir zeigen zunächst, daß dann je zwei Punkte aus M durch eine minimale Geodätische verbunden werden können. Wähle $p, q \in M$.
Lokal kann man minimale Geodätische immer finden! Sei ϵ also so klein gewählt, daß für jedes $v \in T_pM$ mit $\|v\| \leq \epsilon$ die Kurve $t \mapsto \exp_p tv$ $(t \in [0,1])$ minimale Geodätische ist.
Sei $S_\epsilon(p) = \{\tilde{p} | \operatorname{dist}(p, \tilde{p}) = \epsilon\} = \exp_p\{w | \|w\| = \epsilon\}$ (Bild der Tangentialraum–Sphäre unter exp). $S_\epsilon(p)$ ist als Bild einer kompakten Menge unter einer stetigen Abbildung kompakt. Man findet nach Lemma 3.9 eine Folge $(m_j) \subset S_\epsilon(p)$ mit $\operatorname{dist}(m_j, q) \leq \operatorname{dist}(p,q) - \epsilon + \frac{1}{j}$ (Annahme: $\operatorname{dist}(p,q) > \epsilon$, sonst trivial.) Wähle eine konvergente Teilfolge mit Limes m, dann ist

$$\operatorname{dist}(p,m) + \operatorname{dist}(m,q) = \operatorname{dist}(p,q)\ .$$

Es gibt ein eindeutig bestimmtes $v \in T_pM$ mit $\|v\| = 1, \exp_p(\epsilon v) = m$. Diese Geodätische kann man nach Voraussetzung fortsetzen. Man hofft natürlich, daß man q trifft. Sei also

$$\tau := \sup\bigl\{t \leq \operatorname{dist}(p,q) |\ \operatorname{dist}\bigl(p, \exp_p(tv)\bigr) + \operatorname{dist}\bigl(\exp_p(tv), q\bigr) = \operatorname{dist}(p,q)\bigr\}\ .$$

Zeige: $\tau = \operatorname{dist}(p,q)$. $\tau \geq \epsilon$ gilt schon, wie gezeigt.
Nimm also an, $\tau < \operatorname{dist}(p,q)$. τ ist nicht nur Supremum, sondern auch Maximum, denn dist ist stetig:

$$(*) \qquad \operatorname{dist}\bigl(p, \underbrace{\exp_p(\tau v)}_{=:y}\bigr) + \operatorname{dist}\bigl(\exp_p(\tau v), q\bigr) = \operatorname{dist}(p,q)$$

Man wendet die alte Methode an und konstruiert eine kleine Sphäre um y. Man sucht ein m_1 wie zuvor mit $\operatorname{dist}(y, m_1) = \delta > 0, \operatorname{dist}(y, m_1) + \operatorname{dist}(m_1, q) = \operatorname{dist}(y,q)$. Dann müssen sich aber auch die Abstände $n \to y \to m_1$ addieren,
$n = \exp_p\bigl((\tau - \delta)v\bigr)$: Sei jetzt $A_1 \in T_yM$ Tangente der Geodätischen $y \to n$, A_2 Tangente der Geodätischen von $y \to m_1$. Entweder man hat einen Knick, oder τ ist nicht maximal.

(i) $A_1 = -A_2$, dann gilt $\exp_p(\tau + \delta)v = m_1$, und $\operatorname{dist}(p, m_1) + \operatorname{dist}(m_1, q) = \operatorname{dist}(p,q)$, dann war τ nicht maximal, im Widerspruch zur Annahme.

(ii) $A_1 \neq -A_2$, dann kann man von n nach m_1 eine Abkürzung finden; $\operatorname{dist}(n, m_1) < 2\delta$, und

$$\underbrace{\operatorname{dist}(p,n) + \operatorname{dist}(n,y)}_{=\operatorname{dist}(p,y)} + \underbrace{\operatorname{dist}(y,m_1) + \operatorname{dist}(m_1,q)}_{=\operatorname{dist}(y,q)} > \operatorname{dist}(p,q)$$

in Widerspruch zu $(*)$.

Daraus folgt, daß $\tau = \operatorname{dist}(p,q)$ gelten muß, also findet man zu p, q eine minimale Geodätische $p \to q$
Also ist der Ball $B = \{z \in M | \operatorname{dist}(p,z) \leq R\} \subset \exp_p\{X \in T_pM | \|X\| \leq R\}$ (letztere Menge ist (im euklidischen) kompakt) als abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Menge ebenfalls kompakt. Damit sind Bälle in M kompakt, und M ist vollständig.

(ii) Sei M vollständig.
Sei $X \in T_pM, T := \sup\{t |\ \exp_p sX$ definiert für $s \leq t\}$. Nimm an $T < \infty$. Man sucht sich eine Folge $(t_j) \subset [0, T[, t_j \to T$. Man kann zeigen, daß man eine Cauchyfolge erhält über $(\exp_p t_j X)_j \subset M$. Da $\mathrm{dist}(\exp_p t_j X, \exp_p t_i X) \leq |t_i - t_j|\,\|X\|$ gilt, konvergiert die Folge. Man definiert dann $\exp_p TX = \lim_{j\to\infty} \exp_p t_j X$.
Dann ist $t \mapsto \exp tX\ (t \in [0, T])$ Geodätische.
Die Lösung der Differentialgleichung für Geodätische in $\exp TX$ kann man aber noch ein Stückchen fortsetzen; aus dieser Tatsache erhält man den Widerspruch zur Annahme $T < \infty$. □

Korollar 3.43. *Sei (M, g) eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit und $\psi : M \to M$ eine Isometrie. Dann ist ψ eindeutig durch $D\psi(p)$ für p beliebig bestimmt.*

Beweis. x ist die Anfangsrichtung der Geodätischen. Unter ψ wird diese Kurve wieder auf eine Geodätische abgebildet:
ψ Isometrie, d.h. $\psi(\exp X) = \exp(\mathrm{D}\psi(X))$. Weil für $p \in M$ $\exp_p$ surjektiv ist folgt, daß jedes $q \in M$ in der Form $q = \exp_p(X), X \in T_pM$ geschrieben werden kann, damit ist $\psi(q) = \exp\big(\mathrm{D}\psi(X)\big)$ durch $\mathrm{D}\psi(p)$ bestimmt. □

Damit kann man z.B. konkrete Isometriegruppen bestimmen:

Beispiel 3.44. (i) $\mathrm{Iso}(S^n) = \mathcal{O}(n+1)$. Es gilt jedenfalls: $\mathcal{O}(n+1) \subset \mathrm{Iso}(S^n)$. Sei jetzt $\psi \in \mathrm{Iso}(S^n), p \in S^n$. ψ ist (s.o.) durch sein Differential in p festgelegt. Sei $q = \psi(p)$. $\mathrm{D}\psi$ bildet $T_pS^n \to T_qS^n$ isometrisch und linear ab. Bestimme jetzt $A \in \mathcal{O}(n+1)$ so, daß $A(p) = q$ gilt. T_pS^n entspricht (modulo Verschiebung) der Menge $p^\perp \subset \mathbb{R}^{n+1}$, genauso $T_qS^n \sim q^\perp \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Man kann A so wählen, daß $A_{|p^\perp} = D\psi_{|p}$, denn $D\psi_{|p}$ ist lineare Isometrie von $p^\perp$ auf $q^\perp$. Dann ist $A \in \mathcal{O}(n+1)$, und es gilt nach obigen Lemma $DA_{|p} = D\psi_{|p} \Longrightarrow A = \psi$.

(ii) $\mathrm{Iso}(\mathbb{H}^n) = \mathcal{O}^+_{n,1}$ = Gruppe der Lorentztransformationen, die die obere Schale festlassen. (H^n ist der hyperbolische Raum) (Beweis wie oben)

(iii) Geodätische auf $\mathbb{H}^n$
Geodätische, die wir bisher gefunden hatten, waren Schnitte $\mathbb{H}^n \cap A$, wobei A ein zweidimensionaler Unterraum durch $(1, 0, 0)$, $A \perp T$ war.
Jede Geodätische in $\mathbb{H}^n$ ist Schnitt von $\mathbb{H}^n$ mit einem zweidimensionalen Unterraum des $\mathbb{R}^{n+1}$, denn $\mathrm{Iso}(\mathbb{H}^n) = \mathcal{O}^+_{n,1}$ operiert transitiv auf dem Einheitstangentialbündel $T^1\mathbb{H}^n = \{x \in T\mathbb{H}^n \,|\, g(X, X) = 1\}$ (g ist das Lorentzprodukt)). (Jede Geodätische ist Bild einer Geodätischen durch $(1, 0, 0)$ unter einer Isometrie, und 2–dimensionale Unterräume werden unter Isometrien auf 2–dimensionale Unterräume abgebildet.)

Bemerkung. Unter stereographischer Projektion werden die Geodätischen auf Kreise $K \perp \partial D$ abgebildet. Die Geodätischen im Ballmodell ($\mathbb{H}^n$ unter stereographischer Projektion) sind also die Kreise $K \perp \partial D$. Für Punkte $x, -x$ erhält man eine Strecke (den Durchmesser von D).

Bis jetzt haben wir noch kein Unterscheidungskriterium für Riemannsche Mannigfaltigkeiten. Die Eigenschaften, die wir bisher kennen, gelten für alle.

4. Krümmung

BILD

Man betrachtet die Normale an die Flächen. Für die Ebene 2) sieht die Normale modulo Translation immer gleich aus. Für die S^2 (1)) ist das keineswegs gegeben S^2 und den Sattel 3) kann man dadurch unterscheiden, daß bei S^2 die Tangentialebene die Mannigfaltigkeit nicht schneidet, den Sattel schneidet die Tangentialebene aber sehr wohl!

Definition 4.1. Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine Fläche (2–dimensionale Untermannigfaltigkeit). Die Abbildung $n : S \to S^2$, die $p \in S$ die Einheitsnormale $n(p) \in S^2$ zuordnet, heißt *Gauß–Abbildung.*

Bemerkung. $n(p)$ ist differenzierbar, und Dn von n in p bildet $T_pS \cong n(p)^\perp$ in $T_{n(p)}S^2 \cong n(p)^\perp \subset \mathbb{R}^3$ ab. Fasse also $\mathrm{D}n(p)$ als linearen Endomorphismus L_p von T_pS auf.

Definition 4.2. L_p heißt *Weingarten-Abbildung* in p.

Sei jetzt $c : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow S$ eine Kurve; da die Länge der Einheitsnormale 1 ist, gilt

$$0 = \frac{d}{dt}\langle n(c(t)), n(c(t))\rangle = \Big\langle \underbrace{\frac{d}{dt} n(c(t))}_{\in T_{c(t)}S}, n(c(t))\Big\rangle$$

und

$$\frac{d}{dt} n(c(t)) = L_{c(t)}(c'(t)) \ .$$

Im euklidischen sind die partiellen Ableitungen vertauschbar. Hier bekommen wir eine ähnliche Eigenschaft:

Lemma 4.3. *Die Weingarten-Abbildung L_p (= 2. Fundamentalform) ist selbstadjungiert bezüglich der Metrik $\langle\cdot,\cdot\rangle$.*

Beweis. Sei $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ lokale Karte für S.

$$\left\langle \mathrm{D}\varphi\left(\frac{\partial}{\partial x}\right), n\right\rangle = 0 \Longrightarrow \left\langle \frac{\partial}{\partial y}\mathrm{D}\varphi\left(\frac{\partial}{\partial x}\right), n\right\rangle + \left\langle \mathrm{D}\varphi\left(\frac{\partial}{\partial x}\right), \underbrace{\frac{\partial}{\partial y} n}_{L\left(\mathrm{D}\varphi\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\right)}\right\rangle = 0 \ .$$

Da man hier, im Euklidischen, partielle Ableitungen vertauschen kann, ist

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{\partial}{\partial y}\mathrm{D}\varphi\left(\frac{\partial}{\partial x}\right), n\right\rangle &= \left\langle \frac{\partial}{\partial x}\mathrm{D}\varphi\left(\frac{\partial}{\partial y}\right), n\right\rangle \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\underbrace{\left\langle \mathrm{D}\varphi\left(\frac{\partial}{\partial y}\right), n\right\rangle}_{=0} - \left\langle \mathrm{D}\varphi\left(\frac{\partial}{\partial y}\right), \frac{\partial}{\partial x} n\right\rangle \\
&= -\left\langle \mathrm{D}\varphi\left(\frac{\partial}{\partial y}\right), L\left(\mathrm{D}\varphi\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\right)\right\rangle
\end{aligned}$$

Das heißt

$$\left\langle \mathrm{D}\varphi\left(\frac{\partial}{\partial x}\right), L\left(\mathrm{D}\varphi\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\right)\right\rangle - \left\langle \mathrm{D}\varphi\left(\frac{\partial}{\partial y}\right), L\left(\mathrm{D}\varphi\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\right)\right\rangle = 0$$

woraus folgt, daß L selbstadjungiert ist. $\square$

Bemerkung. $g(\cdot,\cdot)$ heißt entsprechend auch die 1. Fundamentalform.

Definition 4.4. Die auf TS durch $I\!I(X,Y) = -\langle X, LY\rangle$ definierte symmetrische Bilinearform heißt *2. Fundamentalform* von S.

Beispiel 4.5. (a) Die 2. Fundamentalform der Ebene verschwindet identisch (Ableitung von $n(p) =$ const).

(b) Die Weingarten-Abbildung von S^2 ist die Identität. (Die Normale an S^2 entspricht dem Ortsvektor, leitet man diesen ab, so erhält man genau die Tangente.)

(c) Zylinder $Z = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 = 1\}$. Läuft man in Richtung der Achse, so bleibt die Normale konstant, also $L(\frac{\partial}{\partial z}) = 0$. Andererseits ist $L(X) = X$ falls X tangential zum Kreis mit z konstant.

Definition 4.6. Für $p \in S$ hat L_p zwei reelle Eigenwerte $\kappa_1(p) \geq \kappa_2(p)$, die zugehörigen Eigenvektoren heißen *Hauptkrümmungsachsen.* Sei $c : (-\epsilon, \epsilon) \to S$ so, daß $c'(t)$ Hauptkrümmungsachse für alle t, dann heißt c *Krümmungslinie* von S.
Die *Gaußkrümmung* in p ist definiert durch

$$K(p) = \det L_p$$

Die *mittlere Krümmung* H von S in p ist definiert durch $\frac{1}{2}(\text{Spur } L_p)$.
Ein Punkt $p \in S$ heißt

(a) *elliptisch*, falls $K(p) > 0$,
(b) *hyperbolisch*, falls $K(p) < 0$
(c) *parabolisch*, falls $K(p) = 0, L_p \neq 0$
(d) *Flachpunkt*, falls $L_p = 0$
(e) *Nabelpunkt*, falls $\kappa_1 = \kappa_2$.

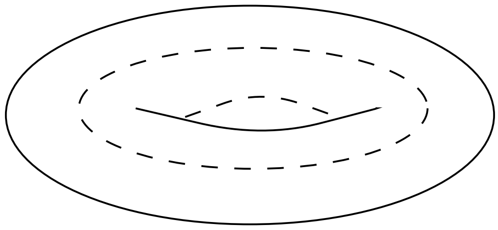
In lokalen Koordinaten $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ kann die 2. Fundamentalform als symmetrische Matrix mit Komponenten h_{ij} dargestellt werden.

$$\begin{aligned}
h_{ij} &= I\!I\left(\mathrm{D}\varphi\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right), \mathrm{D}\varphi\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)\right) \\
&= -\left\langle \mathrm{D}\varphi\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right), \frac{\partial}{\partial x_j} \underbrace{n(\varphi(x_1,x_2))}_{\text{Weingarten-Abbildung}} \right\rangle \\
&= \left\langle \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i}\varphi, n\right\rangle
\end{aligned}$$

Satz 4.7. *Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine Fläche, $p \in S$. Sei p elliptisch ($K(p) > 0$), dann gibt es eine Umgebung V von p in S so, daß jeder Punkt aus V auf derselben Seite der Tangentialebene T_pS liegt. Ist $p \in S$ hyperbolisch ($K(p) < 0$), dann existieren zu jeder Umgebung U von p in S Punkte, die auf verschiedenen Seiten von T_pS liegen.*

Beweis. Sei $\varphi : \mathbb{R}^2 \to S$ Karte und ohne Einschränkung sei $\varphi(0) = p$, dann ist

$$I\!I\left(\mathrm{D}\varphi\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right), \mathrm{D}\varphi\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)\right) = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}\varphi, n\right\rangle \ .$$



Die Taylorformel für φ liefert:

$$\begin{aligned}
\varphi(x_1,x_2) &= \varphi(0)+x_1\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\varphi\right)(0)+x_2\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\varphi\right)(0)\\
&\quad +\tfrac{1}{2}x_1^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\varphi\right)(0)+x_1x_2\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1\,\partial x_2}\varphi\right)(0)\\
&\quad \tfrac{1}{2}x_2^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\varphi\right)(0)+o(x_1^2+x_2^2)
\end{aligned}$$

Mit $\langle$Tang.–Vekt.$, n\rangle = 0$ folgt:

$$\begin{aligned}
\langle\varphi(x_1,x_2)-\varphi(0),n_p\rangle &= \tfrac{1}{2}\left\langle x_1^2\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\varphi(0)+x_1x_2\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1\,\partial x_2}\varphi\right)(0),n_p\right\rangle\\
&\quad +\tfrac{1}{2}\left\langle x_2^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\varphi\right)(0),n_p\right\rangle+o(x_1^2+x_2^2)\\
&= \tfrac{1}{2}I\!I_p\left(x_1\frac{\partial}{\partial x_1}\varphi+x_2\frac{\partial}{\partial x_2}\varphi, x_1\frac{\partial}{\partial x_1}\varphi+x_2\frac{\partial}{\partial x_2}\varphi\right)+o(x_1^2+x_2^2)
\end{aligned}$$

Falls die Gauß–Krümmung positiv, p also elliptischer Punkt ist, haben beide Eigenwerte von L_p das gleiche Vorzeichen, daraus folgt $I\!I_p$ ist positiv definit, d.h. $\langle\varphi(x_1,x_2)-\varphi(0),n\rangle$ hat nahe 0 nur *ein* Vorzeichen (welches, ist abhängig von $I\!I_p$). Dann liegen die Punkte auf einer Seite.
Ist umgekehrt die Gauß–Krümmung negativ, dann ist $I\!I_p$ indefinit, d.h. es gibt Punkte mit positivem und solche mit negativem Vorzeichen für $\langle\varphi(x_1,x_2)-\varphi(0),n\rangle$ in einer beliebigen Umgebung von 0. $\square$

Beispiel 4.8. (Rotationstorus)
BILD

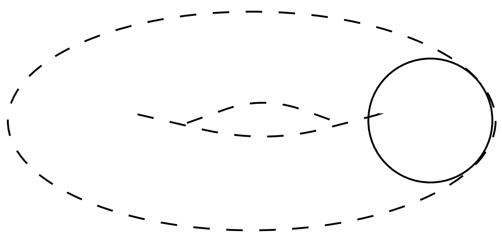
Im Inneren ist die Gaußkrümmung negativ, im äußeren positiv.

$$\begin{aligned}
&\varphi(x,y)=\big((a+r\cos x)\cos y,(a+r\cos x)\sin y, r\sin x)\big) \quad \text{mit } 0<x<2\pi, 0<y<2\pi\\
&\tfrac{\partial}{\partial x}\varphi=(-r\sin x\cos y,-r\sin x\sin y,r\cos x)\\
&\tfrac{\partial}{\partial y}\varphi=(-(a+r\cos x)\sin y,(a+r\cos x)\cos y,0)\\
&g_{11}=r^2,\quad g_{12}=g_{21}=0,\quad g_{22}=(a+r\cos x)^2\\
&n=(\cos x\cos y,\cos x\sin y,\sin x)
\end{aligned}$$

Berechne die Skalarprodukte der 2. Ableitung mit der Normalen, normiere und bilde die Determinante der Weingarten–Abbildung. Als Skalarprodukt erhält man $\left\langle\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi,n\right\rangle=r, \left\langle\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\varphi,n\right\rangle=0, \left\langle\frac{\partial^2}{\partial y^2}\varphi,n\right\rangle=$ $\cos(a+r\cos x)$ Man erhält die Matrix mit der Determinante

$$\det L_p = K = \frac{\cos x}{r(a+r\cos x)}$$

Dabei ist $K=0$ längs der Breitenkreise $x=\frac{\pi}{2}, x=\frac{3\pi}{2}$



B ist die Trennlinie für elliptische und hyperbolische Punkte; genauso der tiefste Breitenkreis B'. Im Schnitt
B und B' bestehen aus parabolischen Punkten.

Satz 4.9. *Sei $S \subset \mathbb{R}^2$ zusammenhängend, vollständig und so, daß jedes $p \in S$ Nabelpunkt ist, also $\kappa_1 = \kappa_2$. Dann ist S entweder eine Sphäre oder eine Ebene.*

Beweis. $\varphi : \mathbb{R}^2 \supset U \to \mathbb{R}^3$ sei Karte, $\varphi(0) = p$. Die Gleichung für Nabelpunkte ist

$$Dn_p(\omega) = \lambda(p)\,\omega$$

mit einer Funktion $\lambda : S \to \mathbb{R}$. Es empfiehlt sich deshalb, in Koordinaten zu rechnen, weil man Differentialgleichungen als Lösungen erwartet, und das ist auf Mannigfaltigkeiten im allgemeinen nicht so schön.

$$(*) \qquad \tfrac{\partial}{\partial x} n = \lambda \tfrac{\partial}{\partial x}\varphi\ ; \qquad \tfrac{\partial}{\partial y} n = \lambda \tfrac{\partial}{\partial y}\varphi$$

und zweite Ableitungen

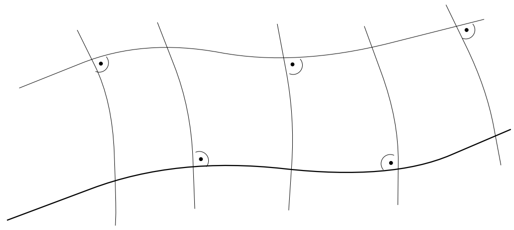
$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} n &= \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\lambda \frac{\partial}{\partial x}\varphi + \lambda \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\varphi = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} n \quad (\text{in } \mathbb{R}^3) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}\lambda \frac{\partial}{\partial y}\varphi + \lambda \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\varphi \end{aligned}$$

woraus folgt, daß $\frac{\partial}{\partial x}\lambda = 0 = \frac{\partial}{\partial y}\lambda$ ist, weil $\frac{\partial}{\partial x}\varphi$, $\frac{\partial}{\partial y}\varphi$ linear unabhängig sind, also muß λ eine Konstante und keine „echte“ Funktion sein.

(a) Ist $\lambda = 0$, dann folgt aus $(*)$, daß die Normale konstant ist; man erhält eine Ebene (lokal zunächst den Teil einer Ebene, da die Mannigfaltigkeit aber vollständig war, eine ganze Ebene).
(b) Ist $\lambda \neq 0$, dann folgt $\varphi(x,y) - \frac{1}{\lambda}\, n(x,y) = \omega_0 = \text{const}$, also $|\varphi(x,y) - \omega_o| = \frac{1}{|\lambda|} = \text{const}$. Man hat also eine Sphäre um ω_0 mit dem Radius $\frac{1}{|\lambda|}$.

□

Es gibt auf jeder Riemannschen Mannigfaltigkeit eine *isotherme Koordinate* mit $g_{11} = g_{22}, g_{21} = g_{12} = 0$, also recht schön. Das ist im allgemeinen allerdings nicht einfach zu beweisen, stellt aber die allgemeine Form dessen dar, was wir jetzt tun:
Betrachte die exp–Koordinaten:
Man bekommt durch Projektion der Mannigfaltigkeit auf T_pM mittels exp „so etwas wie“ Polarkoordinaten. Diese sind allerdings nicht für jeden Zweck geeignet; im Euklidischen funktionieren oft die kartesischen Koordinaten besser.
Methode
Projiziert man das auf den Tangentialraum, so erhält man „so etwas wie“ kartesische Koordinaten.



Erinnerung: Sei (M, g) Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Riemannscher Metrik mit den lokalen Koordinaten $(x_1, \ldots, x_n)$ (man kann die Metrik dann als matrixwertige Funktion durch $(g_{ij})_{ij}$ beschreiben). Die *Christoffel–Symbole* (koordinatenabhängig) waren gegeben durch

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_k \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k} \ .$$

Diese Symbole kann man ausrechnen:

$$g\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_\ell}\right) = \sum_k \Gamma_{ij}^k g_{k\ell} \ .$$

Die Inverse zu (g_{ij}) existiert, also multipliziere mit der Inversen und löse dann nach Γ_{ij}^k auf. Bezeichne dazu die zu g_{ij} inverse Matrix mit g^{ij}. Dann folgt

$$\sum_\ell g^{\ell m} g\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_\ell}\right) = \sum_{\ell,k} g^{\ell m} \Gamma_{ij}^k g_{k\ell} \overset{\ell \text{ fest}}{=} \sum_k \delta_{km} \Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ij}^m \ .$$

Satz 4.10.

$$\Gamma_{ij}^m = \frac{1}{2}\left[\sum_k g^{km}\left[\frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ji} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ki}\right]\right]$$

„Das ist manchmal nützlich, meistens aber doch nicht... für Flächen ist es auch nicht immer nützlich, manchmal aber eben doch!“

Satz 4.11. *(Existenz geodätischer Parallelkoordinaten) S sei eine Fläche, $c : (-\epsilon, \epsilon) \to S$ eine Kurve, $c'(0) \neq 0$. Dann gibt es Koordinaten $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \to S$ so, daß gilt*

(i) $\varphi(t, 0) = c(t)$

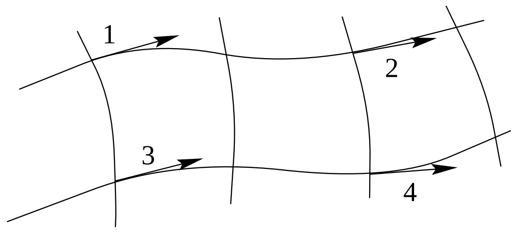
(ii) *Für jedes feste t ist $s \mapsto \varphi(t, s)$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte Geodätische, die die Kurve c senkrecht schneidet*

(iii) *Die 1. Fundamentalform ist von der Form (in diesen Koordinaten)*

$$g_{11} > 0, \quad g_{12} = g_{21} = 0, \quad g_{22} = 1.$$

Beweis. Wähle ein lokales Vektorfeld X entlang c, so daß $g(X, X) = 1$ (Normierung), $g\big(X, c'(t)\big) = 0$ (senkrecht zur Tangentialebene). (Man hat immer noch zwei Möglichkeiten für X, wähle eine davon.)
Definiere jetzt $\varphi(t, s) := \exp_{c(t)}\big(sX(t)\big)$. Das ist eine differenzierbare Abbildung, und $\mathrm{D}\varphi(0)$ hat maximalen Rang (die Tangente an X (2. Teil) ist ja senkrecht zur Tangente der Kurve (1. Teil)). Daraus folgt, φ ist Diffeomorphismus von $\mathbb{R}^2 \supset U \to S$, also lokale Koordinate. g_{11}, g_{22} sind nach Definition klar, man muß noch zeigen: $g_{12} = g_{21} = 0$. Man muß ausnutzen, daß man eine Geodätische hat:
Berechnung von Metrik und Γ_{ij}^k–Symbolen in den Koordinaten:

(a) $g_{22} = 1$ (nach der Bogenlänge parametrisiert)



(b) $s \mapsto \big(\underbrace{X_1(s)}_{=\text{const}}, \underbrace{X_2(s)}_{=s}\big) \cong (t,s)$ erfüllt die Differentialgleichung für Geodätische in den Koordinaten φ, d.h.

$$(*) \qquad X_i''(s) + \sum_{j,k} X_j'(s) X_k'(s)\, \Gamma^i_{jk} = 0 \ , \qquad (i = 1,2)$$

und es gilt

$$X_1''(s) = 0 \ , \quad X_1'(s) = 0 \ , \quad X_2'(s) = 1 \ .$$

Für $i = 1$ folgt aus $(*)$, daß $\Gamma^1_{22} = 0$, ebenso $\Gamma^2_{22} = 0$ für $i = 2$. Aber

$$\Gamma^2_{22} = \tfrac{1}{2} \sum_i g^{2i} \left(\frac{\partial}{\partial X_2} g_{2i} - \frac{\partial}{\partial X_i} \underbrace{g_{22}}_{=1} + \frac{\partial}{\partial X_2} g_{i2} \right)$$

Für $i = 2$ sind alle Ableitungen 0, also bleibt $i = 1$:

$$\Gamma^2_{22} = g^{21} \left(\frac{\partial}{\partial X_2} g_{21} \right) \ .$$

Wegen $\Gamma^2_{22} = 0$ und $g^{21} = \frac{1}{\det(g_{ij})} g_{12}$ ist also

$$\frac{1}{\det(g_{ij})} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial X_2} (g_{12})^2 = 0 \ .$$

Fazit: $s \mapsto g_{12}(t,s)$ ist konstant für alle t, denn die Ableitung verschwindet. Wegen $g_{12}(t,0) = 0$ nach Konstruktion ist $g_{12} \equiv 0 \equiv g_{21}$. Damit ist man fertig.

□

Man kann zeigen, daß das auf einer höher dimensionalen Mannigfaltigkeit ($\dim > 2$) nicht mehr ohne weiteres funktioniert. Dort wird es sowohl mit Differentialgleichungen als auch mit der gesamten Aussage schwierig.
Als nächstes werden wir zeigen, daß die Gauß–Krümmung koordinatenunabhängig ist und nur auf der Metrik fußt.

Lemma 4.12. *Sei S eine Fläche. Dann sind folgende Aussagen gleichwertig:*

(a) *zu $p \in S$ existieren Koordinaten φ so, daß die Metrik durch die Matrix $(g_{ij}) = (\delta_{ij})$ gegeben ist.*
(b) *Die Parallelverschiebung in einer Koordinatenumgebung ist unabhängig vom Weg.*

Vorsicht: Der Satz gilt im allgemeinen nicht global! (Bei einfach zusammenhängenden Mannigfaltigkeiten geht es.)

Beweis. (a)$\Longrightarrow$(b) ist klar, denn dann sind die $\Gamma^k_{ij} \equiv 0$.
(b)$\Longrightarrow$(a). Wähle eine Kurve $c : (-\epsilon, \epsilon) \to S$, c sei nach der Bogenlänge parametrisierte Geodätische; $\varphi(t,s)$ seien die geodätischen Parallelkoordinaten basierend auf c.

Der Tangentenvektor (1) parallel an c entlang verschoben liefert wieder einen Tangentenvektor an c (2). Verschiebt man (1) bzw. (2) entlang den Geodätischen, so erhält man einen Vektor derselben Länge, der senkrecht auf der Tangente der Geodätischen steht ((3) und (4)). Bis auf Normierung sind diese Einheitsvektoren Tangenten der Kurven $t \mapsto \varphi(t,s)$ (s fest).
Formal: Sei $X = c'(0), s > 0$ fest. Dann ist wegen der Wegunabhängigkeit der Parallelverschiebung von X das Vektorfeld

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\varphi(t,s)}{\sqrt{g_{11}(\varphi(t,s))}}$$

parallel entlang der Kurve $t \mapsto \varphi(t,s)$.
Insbesondere gilt $\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \frac{\partial}{\partial t} = \alpha(t,s) \frac{\partial}{\partial t}$ mit einer Funktion α, und damit gilt für die Christoffel–Symbole $\Gamma_{11}^2 = 0$ (nach der Formel für die Christoffel–Symbole). Aber

$$\Gamma_{11}^2 = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial t} g_{12} - \frac{\partial}{\partial s} g_{11} + \frac{\partial}{\partial t} g_{21}\right) = \tfrac{1}{2}\left(-\frac{\partial}{\partial s} g_{11}\right) \quad (= 0)$$

($g_{12} = g_{21} = 0$); also ist $g_{11} = \text{const} \equiv 1$. □

Jetzt will man die kovariante Ableitung systematisch untersuchen; lokale Koordinaten reichen auf die Dauer nicht. Sei also $S \subset \mathbb{R}^3$ Fläche, $\varphi : U \to \mathbb{R}^3$ lokale Koordinaten. Dann ist

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_i} = \text{pr}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i}\varphi\right) ,$$

wobei pr die orthogonale Projektion $\text{pr} : T\mathbb{R}^3_{|S} \to TS$ ist,

$$= \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i}\varphi - \underbrace{\left\langle \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i}\varphi, n\right\rangle}_{\text{Normalenkomponente}}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i}\varphi - I\!I\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\varphi, \frac{\partial}{\partial x_i}\varphi\right)\cdot n \; .$$

Dementsprechend kann man auch die 2. kovariante Ableitung berechnen (never compute in public...)

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_k}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_i}\varphi = \text{pr}\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i}\varphi - \frac{\partial}{\partial x_k} I\!I\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\varphi, \frac{\partial}{\partial x_j}\varphi\right)\cdot n\right)$$

Wenn man $I\!I$ ableitet, bekommt man etwas in Richtung der Normalen, das fällt unter pr weg

$$= \text{pr}\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i}\varphi\right) - I\!I\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\varphi, \frac{\partial}{\partial x_j}\varphi\right)\frac{\partial}{\partial x_k} n$$

Hieraus folgt

$$\left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_k}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_i}\varphi, \frac{\partial}{\partial x_\ell}\varphi\right\rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i}\varphi, \frac{\partial}{\partial x_\ell}\varphi\right\rangle + I\!I\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\varphi, \frac{\partial}{\partial x_j}\varphi\right) I\!I\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\varphi, \frac{\partial}{\partial x_\ell}\varphi\right)$$

Das benutzt man jetzt für den folgenden Satz:

Satz 4.13. *(Theorema egregium) Die Gaußsche Krümmung K einer Fläche $S \subset \mathbb{R}^3$ hängt nur von der 1. Fundamentalform, d.h. von der Metrik g auf S ab.*
In lokalen Koordinaten (x_1, x_2) gilt:

$$K(p) = g(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_2}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_1}} \tfrac{\partial}{\partial x_1} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_1}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_2}} \tfrac{\partial}{\partial x_2}, \tfrac{\partial}{\partial x_2}) / \det(g_{ij})_{ij} .$$

Insbesondere gilt in geodätischen Polarkoordinaten ($g_{11}>0, g_{12}=0, g_{22}=1$), *daß*

$$K(p) = -\frac{\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\sqrt{g_{11}}}{\sqrt{g_{11}}}.$$

und $K=0$ *genau dann, wenn* S *lokal euklidisch ist.*

Beweis. (i) Setze $i,j=1, k,\ell=2$, dann folgt aus obiger Formel:

$$g\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_2}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_1}}\frac{\partial}{\partial x_1}\varphi, \frac{\partial}{\partial x_2}\varphi\right) = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\varphi, \frac{\partial}{\partial x_2}\varphi\right\rangle + I\!I\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\varphi, \frac{\partial}{\partial x_1}\varphi\right) I\!I\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\varphi, \frac{\partial}{\partial x_2}\varphi\right)$$

Dieselbe Rechnung mit $k=i=1$ und $j=\ell=2$ und Substraktion liefert das Gesuchte.

(ii) Sind $\varphi(x_1,x_2)$ geodätische Parallelkoordinaten, dann ist $g_{11}>0, g_{12}=g_{21}=0, g_{22}\equiv 1$. Man rechnet mit Γ die 2. Ableitung aus:

$$\begin{aligned} \Gamma_{22}^1 &= \Gamma_{22}^2 = 0\ , \qquad \Gamma_{11}^1 = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}g_{11}\right)/g_{11} \\ \Gamma_{11}^2 &= -\tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_2}g_{11}\right)\ , \qquad \Gamma_{12}^1 = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_2}g_{11}\right)/g_{11} = \Gamma_{21}^1 \end{aligned}$$

Das setzt man ein:

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_2}}\frac{\partial}{\partial x_1} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_2}g_{11}\right)/g_{11}\cdot\frac{\partial}{\partial x_1}$$

aus der Darstellung des ∇ durch Γ_{ij}^k–Symbole, und

$$\text{(I)}\qquad -\left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_1}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_2}}\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}\right\rangle = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_2}g_{11}\right)^2/g_{11}$$

$$\text{(II)}\qquad \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_2}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_1}}\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_1}\right\rangle = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}g_{11}\right)$$

Addition von (I) und (II) ergibt die gesuchte Formel, denn die Summe der rechten Seiten ist

$$\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\sqrt{g_{11}} = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\tfrac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_2}g_{11}\right)/\sqrt{g_{11}}\ , \qquad \text{und } \det(g_{ij}) = g_{11}$$

□

Dieser Satz gibt übrigens an, inwieweit die kovarianten Ableitungen vertauschbar sind. Ist $K=0$, dann ist die Metrik euklidisch, und auch die 2. Ableitungen sind vertauschbar. Die 1. Ableitungen sind es ohnehin immer, weil ∇ torsionsfrei ist.

Bemerkung. Ist $\Phi : S\to S$ Isometrie, dann ist $K(\Phi(p)) = K(p)$ für alle p (weil die Krümmung ja nur von der Metrik abhängt).

Beispiel 4.14. (a) $S^2\subset\mathbb{R}^3$ hat konstante Gaußkrümmung. Berechnung: Man wählt Polarkoordinaten (θ,r) auf S^2 mit $g_{11}=\sin^2\theta, g_{12}=g_{21}=0, g_{22}=1$.

$$K(p) = -\frac{\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\sin\theta}{\sin\theta} = 1.$$

Die Sphäre vom Radius $r>0$, S_r^2 hat die Krümmung $\frac{1}{r^2}$, denn $r\mapsto rx$ ist eine Abbildung der Einheitssphäre auf eine Sphäre vom Radius r, $S_1^2\to S_r^2$, welche die Metrik mit r^2 skaliert.

(b) Krümmung der *Pseudosphäre*

BILD

Sie hat die Parametrisierung

$$\varphi(x_1, x_2) = (h(x_1)\cos x_2, h(x_1)\sin x_2, k(x_2))$$

mit $h(t) = e^t$ und $k(t) = \int_0^t \sqrt{1 - e^{2t}}$.
$g_{11} = 1, g_{12} = g_{21} = 0, g_{22} = h^2$. Da $\frac{\partial^2}{\partial t^2} h = h$ gilt, erhält man für die Krümmung

$$K(p) = -1/1 \equiv -1 \qquad \text{(konstante Gaußkrümmung).}$$

(c) $H^2 \subset \mathbb{R}^3$ hat ebenfalls konstante Gaußkrümmung -1 (Hyperboloid im Lorentzraum), da die Lorentzgruppe als Isometriegruppe transitiv auf H^2 operiert.

Erinnerung: Die partiellen kovarianten Ableitungen ergaben bei Vertauschung nicht dasselbe, man mußte mit $[X, Y]$ korrigieren. Genau dasselbe passiert jetzt mit den 2. kovarianten Ableitungen. Will man ein Tensorfeld als Differenz haben, muß man wieder mit Lieklammern korrigieren.

Definition 4.15. Sei $E \xrightarrow{\pi} M$ ein Vektorbündel mit Zusammenhang ∇. Die *Krümmung* R von (E, ∇) ist der Tensor $R \in \mathcal{C}^\infty(T^*M \otimes T^*M \otimes E^* \otimes E)$ definiert durch

$$R(X, Y)\xi = \nabla_X \nabla_Y \xi - \nabla_Y \nabla_X \xi - \nabla_{[X\,Y]}\xi.$$

wobei X, Y Vektorfelder auf M, ξ Schnitt von E, $R(X, Y)\xi$ Schnitt von E. R heißt *Ricci–Tensor*.

Lemma 4.16. (i) *R ist ein* Tensor/Tensorfeld*, d.h. für jedes $p \in M$ definiert R eine 3–lineare Abbildung*

$$T_pM \times T_pM \times E_p \to E_p.$$

(ii) *$R(X, Y) = -R(Y, X) \quad \forall\, X, Y \in T_pM$.*

(Man kann den Tensor als 2–Differentialform mit Werten in $E^* \otimes E$ auffassen.)

Beweis. Zu zeigen: R ist linear über $C^\infty(M)$, d.h. ist $f : M \to \mathbb{R}$ glatt, dann gilt

$$R(fX, Y)\xi = R(X, fY)\xi = R(X, Y)f\xi = fR(X, Y)\xi\ .$$

Also

$$\begin{aligned}
R(X, Y)f\xi &\overset{\text{def}}{=} \nabla_X \nabla_Y f\xi - \nabla_y \nabla_X f\xi - \nabla_{[X,Y]} f\xi \quad \text{Leibnizregel}\\
&= \nabla_X\big((Yf)\xi + f\nabla_Y\xi\big) - \nabla_Y\big((Xf)\xi + f\nabla_X\xi\big) - [X, Y]\, f\xi - f\,\nabla_{[X,Y]}\xi\\
&= Y(f)\,\nabla_X\xi + X(f)\,\nabla_Y\xi + f\,\nabla_X\nabla_Y\xi - Y(f)\,\nabla_X\xi - X(f)\,\nabla_Y\xi\\
&\quad -f\,\nabla_Y\nabla_X\xi - f\,\nabla_{[X,Y]}\xi\\
&= f\,R(X, Y)\,\xi
\end{aligned}$$

□

Wir haben: R ist 2–Form auf M, $R : TM \times TM \to \mathrm{End}(E) \subset E^* \otimes E$

$$R(X, Y)\xi = \nabla_X \nabla_Y \xi - \nabla_Y \nabla_X \xi - \nabla_{[X,Y]}\xi\ .$$

Lemma 4.17. *Sei $E \longrightarrow M$ ein Vektorbündel, g Riemannsche Metrik auf E und ∇ Riemannscher Zusammenhang bezüglich g. Dann gilt:*

$$g\big(R(X, Y)\xi, \eta\big) = -g\big(R(X, Y)\eta, \xi\big)\ .$$

Beweis.

$$\begin{aligned} g\big(R(X,Y)\,\xi,\eta\big) &= g(\nabla_X\nabla_Y\xi - \nabla_Y\nabla_X\xi - \nabla_{[X,Y]}\xi,\eta) \\ &= X\,g(\nabla_Y\xi,\eta) - g(\nabla_Y\xi,\nabla_X\eta) - Y\,g(\nabla_X\xi,\eta) \\ &\quad + g(\nabla_X\xi,\nabla_Y\eta) - [X,Y]\,g(\xi,\eta) + g(\xi,\nabla_{[X,Y]}\eta)\ . \end{aligned}$$

Man zieht die restlichen kovarianten Ableitungen auch noch aus den Klammern, dann fällt einiges weg, und beim Zusammenfassen kommt man auf die Behauptung. □

Satz 4.18. *(1. Bianchi Identität) Sei ∇ ein torsionsfreier Zusammenhang auf TM. Dann gilt (analog zur Jacobi–Identität der Lieklammer $[\,,\,]$ für Vektorfelder):*

$$R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y \equiv 0.$$

Beweis.

$$\begin{aligned} \nabla_X\nabla_Y Z &= \nabla_X(\nabla_Z Y) + [Y,Z] \\ &= \nabla_X\nabla_Z Y + \nabla_{[Y,Z]}X + \big[X,[Y,Z]\big]\ . \end{aligned}$$

Setzt man in die Definition von R diese Umformungen ein, dann bleiben nur die Lieklammern übrig, und für diese hat man

$$\big[X,[Y,Z]\big] + \big[Y,[Z,X]\big] + \big[Z,[X,Y]\big] = 0$$

nach der Jacobi–Identität. □

Korollar 4.19. *Sei (M,g) Riemannsche Mannigfaltigkeit, ∇ Levi–Civita–Zusammenhang, R der Krümmungstensor. Dann gilt:*

(i) $R(X,Y) = -R(Y,X)$
(ii) $R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y \equiv 0$ *(Bianchi)*
(iii) $g\big(R(X,Y)Z,W\big) = -g\big(R(X,Y)W,Z\big)$
(iv) $g\big(R(X,Y)Z,W\big) = g\big(R(Z,W)X,Y\big)$, *d.h. man kann die Parameter paarweise vertauschen*

iv) gilt dabei nur für den Levi–Civita–Zusammenhang.

Bemerkung. In der Literatur hat man auch

$$R(X,Y)Z = \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_{[X,Y]}Z$$

(genau das Negative unserer Definition); derselbe Unterschied existiert im übrigen auch für den Laplace–Operator.

Definition 4.20. Sei R der Krümmungstensor des Levi–Civita–Zusammenhangs.

(i) Sei (M,g) Riemannsche Mannigfaltigkeit, $p \in M$. Sei $S \subset T_pM$ ein 2–dimensionaler Unterraum von T_pM, der von $X,Y \in T_pM$ aufgespannt wird. Die *Schnittkrümmung* $K(S)$ von S ist definiert durch:

$$K(S) := \frac{g(R(X,Y)Y,X)}{g(X,X)g(Y,Y) - g(X,Y)^2}$$

(Ist $S \subset \mathbb{R}^3$ Fläche, dann ist jeder 2–dimensionale Unterraum von TS „Umparametrisierung“ von TS, und die Schnittkrümmung entspricht der Gaußkrümmung.)

(ii) M heißt *flach*, falls $K \equiv 0$

(iii) M hat konstante Schnittkrümmung, falls es ein $C \in \mathbb{R}$ gibt mit $K(S) = C$ für jeden 2-dimensionalen Unterraum $S \subset TM$.

Bemerkung. (i) Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ Fläche, dann gilt daß $K(T_pS) =$ Gaußkrümmung in p. (Der Tangentialraum ist 2–dimensional.)

(ii) Die Definition von $K(S)$ hängt nicht von der Wahl der Basis von S ab.

(iii) Sei $\Phi : (M,g) \to (M,g)$ Isometrie, dann gilt

$$R(\mathrm{D}\Phi X, \mathrm{D}\Phi Y)\mathrm{D}\Phi Z = \mathrm{D}\Phi(R(X,Y)Z) \quad \text{für alle } p \in M,\ X,Y,Z \in T_pM.$$

(Das folgt aus $\nabla_{\mathrm{D}\Phi X}\mathrm{D}\Phi Y = \mathrm{D}\Phi(\nabla_x Y)$; die Isometrie muß die Metrik erhalten, damit auch den Levi–Civita–Zusammenhang als metrischen Zusammenhang.) Insbesondere gilt für eine Ebene (2–dimensionaler Unterraum) $S \subset T_pM : K(S) = K(\mathrm{D}\Phi S)$.

Beispiel 4.21. (i) $(\mathbb{R}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ist flach.

(ii) $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ hat konstante Krümmung, denn sei $p,q \in S^n$, M_1 Ebene in T_pS^n, M_2 Ebene in T_qS^n, (X_1,Y_1) Orthonormalbasis von M_1, (X_2,Y_2) Orthonormalbasis von M_2, dann existiert $A \in \mathcal{O}(n+1)$ mit $A(p) = q, A(X_1) = X_2, A(Y_1) = Y_2$, also A Isometrie von $S^n, \mathrm{D}A_{|M_1} = M_2$. Die Schnittkrümmung ist unter $\mathrm{D}A$ invariant, also konstant (man kann sie isometrisch überallhin verschieben).

(iii) Hyperbolischer Raum $\mathbb{H}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ hat als Isometriegruppe die Lorentztransformationen. Sie operieren transitiv auf $\mathbb{H}^n$, also hat $\mathbb{H}^n$ ebenfalls konstante Krümmung.

Weitere Beispiele lassen sich über Quotientenräume und gelöcherte Mannigfaltigkeiten basteln. Es gibt jedoch keine weiteren *einfach zusammenhängenden* Mannigfaltigkeiten mit konstanter Krümmung.

Bemerkung. Ist R der Krümmungtensor des Levi–Civita–Zusammenhangs, dann ist R allein durch die Schnittkrümmung bestimmt.

Beweis. Für $p \in M$ ist T_pM ein euklidischer Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$. R auf T_pM kann als 4–lineare Abbildung aufgefaßt werden via

$$\begin{array}{rcl} \overline{R}(T_M)^4 & \to & \mathbb{R} \\ \overline{R}(X,Y,Z,W) & \mapsto & \langle R(X,Y)Z, W\rangle \end{array}$$

mit $\overline{R}(X,Y,Z,W) = -\overline{R}(X,Y,Z,W) = \overline{R}(Z,W,X,Y) = -\overline{R}(Y,Z,X,W) - \overline{R}(Z,X,Y,W)$. Ist $T : (T_pM)^4 \to \mathbb{R}$ ein Tensor, der dieselben algebraischen Eigenschaften hat, und wenn gilt, daß

$$(\bullet) \qquad T(X,Y,Y,X) = \overline{R}(X,Y,Y,X) \quad \forall X,Y \in T_pM\ ,$$

dann ist $T \equiv R$. $(\bullet)$ ist gerade die Schnittkrümmung. Stimmen beide dort überein, dann sind sie gleich. (Man rechnet dazu aus: $T(X,Y,Y,X) = 0 \Longrightarrow T \equiv 0$. Kobayashi, Gallot.) □

Bemerkung. (E,∇) heißt *flach*, falls $R \equiv 0$.

Satz 4.22. *$(E,\nabla) \to M$ ist genau dann flach, wenn es zu $p \in M$ eine lokale Basis $(X_1,\ldots,X_k)$ von E nahe p gibt mit $\nabla X_i \equiv 0$.*

Beweis. (i) Ist eine solche lokale Basis vorhanden, dann gilt für jedes Vektorfeld Z von der Form $Z = \sum_i Z_iX_i$ mit konstanten $Z_i \in \mathbb{R}$, daß $\nabla Z = 0$. Hieraus berechnet man unmittelbar $R \equiv 0$ (R ist Tensor!)

(ii) Sei ∇ flach, $p \in M, (Y_1, \dots, Y_n)$ Koordinaten in p so, daß $0 \sim p$ in Koordinaten. Sei $(\bar{X}_1 \dots \bar{X}_k)$ Basis von E_p. Definiere lokale Vektorfelder X_i nahe p für $q \in \mathbb{R}^n$:

$$X_i(q) = \text{ Bild von } \bar{X}_i \text{ unter Parallelverschiebung entlang der Kurve} t \mapsto t \cdot q$$

Zu zeigen ist: $\nabla X_i = 0$. Sei hierzu $\varphi : (-\epsilon, \epsilon)^2 \to M$ so, daß $\varphi(s,t) = t\, q(s)$ für $q(s) \in \mathbb{R}^n$ in Koordinaten. Dann $\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} X_i = 0 = \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} X_i = \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} X_i$; hierbei folgt die letzte Gleichung aus der Voraussetzung, daß ∇ flach ist. Für $t = 0$ verschwindet aber die Tangente von $s \mapsto \varphi(0,s)$ und daher $\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} X_i \equiv 0$, d.h. ($\varphi$ war beliebig) auch $\nabla X_i \equiv 0$. Schrumpfe c auf den Punkt auf dem „Radius“ zusammen und berechne dort die kovariante Ableitung:

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \varphi X_i = 0 \text{ wegen } \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \varphi X_{i|s=0} = 0 \text{ wegen } \frac{\partial}{\partial s} \varphi_{|s=0} = 0 \, .$$

□

Da wir ja schon mal dabei sind, unsere Definitionen auf M^n zu übertragen, suchen wir jetzt eine 2. Fundamentalform. Statt einem Normalenfeld hat man jetzt im Zweifel ein ganzes Bündel.

Satz 4.23. *Sei (M,g) Riemannsche Mannigfaltigkeit, $N \subset M$ Untermannigfaltigkeit, g^N die von g auf N induzierte Metrik. Sei $P : TM_{|_N} \to TN$ die g-orthogonale Projektion. Für Vektorfelder X, Y auf N setze $\nabla^N_X Y = P(\nabla_X Y)$, wobei ∇ der Levi–Civita–Zusammenhang von M. (Eigentlich müßten X, Y Vektorfelder auf M sein; man muß diese irgendwie einschränken oder aber X, Y von N auf M fortsetzen.) Dann ist ∇^N Levi–Civita–Zusammenhang von N.*

Beweis. (i) ∇^N ist Riemannsch, denn

$$\begin{aligned} X\, g^N(Y,Z) &\stackrel{\text{def}}{=} X\, g(Y,Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) \\ &\stackrel{\text{def}}{=} g(\nabla^N_X Y, Z) + g(Y, \nabla^N_X Z) \end{aligned}$$

(ii) ∇^N ist torsionsfrei, denn die Normalenkomponenten fallen durch die Projektion weg.

□

Für $p \in N$ setze $T_pN^\perp = \{X \in T_pM \mid g(X,Y) = 0,\ Y \in T_pN\}$. Die Zuordnung $p \to T_pN^\perp$ definiert ein Vektorbündel der Dimension $\dim = \operatorname{codim} N \subset M$ über N, das *Normalenbündel.*
Definiere des weiteren die Abbildung $B(X,Y)$ mit $X, Y \in T_pN$ durch

$$g\big(B(X,Y), Z\big) := g^N(\nabla_X Z, Y) \, .$$

Das ist „so etwas Ähnliches“ wie eine 2. Fundamentalform. Man kann damit auch die Krümmungen von ∇^N und ∇ in Beziehung setzen.

Definition 4.24. Ein *Normalenfeld* ξ auf $N \subset (M,g)$ ist ein glatter Schnitt ξ von $TN^\perp$ mit $||\xi|| = 1$ (auch lokal).

Lemma 4.25. *Sei ξ ein Normalenfeld auf $N \subset (M,g)$. Für $Y \in T_pN$ setze $H_{\xi(p)} = -(P\nabla_Y \xi)$, wobei $P : TM_{|_N} \to TN$ die orthogonale Projektion. Dann hängt $H_{\xi(p)}$ nur von $\xi(p)$ ab und es gilt:*

(i) $g(H_{\xi(p)}Y, Z) = g(Y, H_{\xi(p)}Z)$
(ii) $g(\xi(p), \nabla_Y Z) = g(Z, H_{\xi(p)}Y)$

Beweis. Seien Y und Z lokale Vektorfelder auf N nahe p. Dann gilt

$$\begin{aligned}
g(H_{\xi(p)}Y,Z) - g(H_{\xi(p)}Z,Y) &= g\big(Y, P(\nabla_Z\xi(p))\big) - g\big((P\nabla_Y\xi)(p), Z\big) \\
&= g\big(Y, \nabla_Z\xi(p)\big) - g\big(\nabla_Y\xi(p), Z\big) \\
&= Zg\big(Y,\xi\big) - g\big(\nabla_Z Y(p), \xi(p)\big) \\
&- Yg\big(\xi, Z\big) + g\big(\xi(p), \nabla_Y Z\big) \\
&= g\big(\nabla_Y Z, \xi(p)\big) - g\big(\nabla_Z Y, \xi(p)\big) \\
&= g\big([Y,Z](p), \xi(p)\big) = 0, \\
&\qquad \text{da } Y, Z \text{ und } [Y,Z]\ g\text{-orthogonal zu } \xi
\end{aligned}$$

ebenso gilt

$$\begin{aligned}
g(Z(p), H_{\xi(p)}Y) &= -g\big(Z(p), P(\nabla_Y\xi(p))\big) \\
&= -g\big(Z, \nabla_Y\xi(p)\big) \\
&= -Yg\big(Z(p), \xi(p)\big) + g\big(\nabla_Y Z(p), \xi(p)\big) \\
&= g\big(\nabla_Y Z(p), \xi(p)\big).
\end{aligned}$$

Insbesondere hängt $H_{\xi(p)}Y$ nur von $\xi(p)$ ab. ☐

Bemerkung. Im Falle von Flächen im $\mathbb{R}^4$ ist $H_{\xi(p)}$ die Weingarten-Abbildung.

Insbesondere: Für $p \in N$ gibt es eine symmetrische bilineare Abbildung $B : T_pN \times T_pN \to T_pN^\perp$ so, daß

$$B(X(p), Y(p)) = \nabla_X Y - \nabla_X^N Y,$$

wobei ∇ der Levi-Civita–Zusammenhang von M und ∇^N der Levi-Civita–Zusammenhang von N ist. B heißt *2. Fundamentalabbildung.*

Definition 4.26. Sei M eine Riemansche Mannigfaltigkeit und $N \subset M$ eine Untermannigfaltigkeit. N heißt *total geodätisch*, falls jede Geodätische in N auch Geodätische in M ist.

Lemma 4.27. *Sei M eine Riemansche Mannigfaltigkeit und $N \subset M$ eine Untermannigfaltigkeit. N ist genau dann total geodätisch, wenn die 2. Fundamentalabbildung verschwindet.*

Beweis. Ist $B \equiv 0$, dann gilt $\nabla = \nabla^N$. Ist c eine Geodätische in N, dann verschwindet ∇^N entlang c, also auch ∇ entlang c und somit ist c auch eine Geodätische in M. Umgekehrt, wenn $N \subset M$ total geodätisch, dann ist $B(X,X) = 0\ \forall\, X \in TN$. Weil B symmetrisch ist, folgt $B \equiv 0$. ☐

Bemerkung. Ist $N \subset M$ total geodätisch, dann stimmen die Krümmungstensoren R^N in N und R in M eingeschränkt auf N überein.

Beispiel 4.28. (a) $S^2 \subset S^n$ ist total geodätisch eingebettet $\Longrightarrow$ S^n hat die konstante Schnittkrümmung $+1$.

(b) Für einen 2-dimensionalen linearen Unterraum E in $\mathbb{R}^n$ ist $\mathbb{H}^2 = \mathbb{R} \times E \cap \mathbb{H}^n \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ total geodätisch $\Longrightarrow$ die Schnittkrümmung von $\mathbb{H}^n$ ist -1.

Satz 4.29. *(Gauß-Gleichung)*
Sei M eine Riemansche Mannigfaltigkeit, $N \subset M$ eine Untermannigfaltigkeit und R^N der Krümmungstensor von N. Dann gilt für alle $X, Y, Z, T \in TN$:

$$g\big(R(X,Y)Z,T\big) - g\big(R^N(X,Y)Z,T\big) = -g\big(B(X,T), B(Y,Z)\big) + g\big(B(Y,T), B(X,Z)\big).$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
R^N(X,Y)Z &= \nabla^N_X\nabla^N_Y Z - \nabla^N_Y\nabla^N_X Z - \nabla^N_{[X,Y]}Z \\
&= \nabla_X\nabla^N_Y Z - B(X,\nabla^N_Y Z) - \nabla_Y\nabla^N_X Z - B(X,\nabla^N_X Z) - \nabla_{[X,Y]}Z + B\big([X,Y],Z\big) \\
&= \nabla_X\big(\nabla_Y Z - B(Y,Z)\big) - B(X,\nabla^N_Y Z) - \nabla_Y\big(\nabla_X Z - B(X,Z)\big) - B(X,\nabla^N_X Z) \\
&\quad -\nabla_{[X,Y]}Z + B([X,Y],Z)
\end{aligned}$$

Da $B(X,\nabla^N_Y Z), B(X,\nabla^N_X Z), B\big([X,Y],Z\big) \in TN^\perp$, gilt für $T \in TN$:

$$\begin{aligned}
g\big(R^N(X,Y)Z,T\big) &= g\big(\nabla_X\big(\nabla_Y Z - B(Y,Z)\big),T\big) - g\big(\nabla_Y\big(\nabla_X Z - B(X,Z)\big),T\big) \\
&\quad -g(\nabla_{[X,Y]}Z,T) \\
&= g\big(R(X,Y)Z,T\big) - g\big(\nabla_X B(Y,Z),T\big) + g\big(\nabla_Y B(X,Z),T\big) \\
&= g\big(R(X,Y)Z,T\big) + g\big(B(Y,Z),\nabla_X T\big) - g\big(B(X,Z),\nabla_Y T\big) \\
&= g\big(R(X,Y)Z,T\big) + g\big(B(Y,Z),B(X,T)\big) - g\big(B(X,Z),B(Y,T)\big)
\end{aligned}$$

□

Beispiel 4.30. Der *reell projektiver Raum* $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ ist die Menge aller 1-dimensionalen Unterräume in $\mathbb{R}^{n+1}$.

$$\mathbb{R}\mathrm{P}^n = S^n/\Phi, \quad \Phi : S^n \to S^n, \quad \Phi(x) = -x \quad \text{Antipodenabbildung}$$

$\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ trägt Metrik konstanter Krümmung $+1$ so, daß die kanonische Projektion $\pi : S^n \to \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ Riemannsche Überlagerung ist.

Beispiel 4.31. $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ ist die Menge aller 1-dimensionalen $\mathbb{C}$–Unterräume in $\mathbb{C}^{n+1}$

$$\mathbb{C}\mathrm{P}^n = (\mathbb{C}^{n+1})^*/\sim, \quad \text{wobei } z \sim y \Longleftrightarrow z = \lambda y \text{ für } \lambda \in \mathbb{C} - \{0\}.$$

Dies induziert eine Quotiententopologie auf $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$.
Wir möchten den $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ zu einer Riemannschen Mannigfaltigkeit machen. Setze dazu

$$V_i := \{z = (z_0,\ldots,z_n) \in (\mathbb{C}^{n+1})^* \mid z_i \neq 0\}.$$

Definiere $\Phi_i : V_i \to \mathbb{C}^n$ durch

$$\Phi_i(z_0,\ldots,z_n) := \Big(\frac{z_0}{z_i},\ldots,\frac{\hat{z}_i}{z_i},\ldots,\frac{z_n}{z_i}\Big).$$

Es gilt

$$\Phi_i(a) = \Phi_i(b) \Longleftrightarrow a = \lambda\cdot b \text{ für ein } \lambda \in \mathbb{C} \Longleftrightarrow a \sim b \text{ (Def)}.$$

Schreibe $[z]$ für die Äquivalenzklasse von $z \in (\mathbb{C}^{n+1})^*/\sim$. Es folgt

$$\Phi_i(a) = \Phi_i(b) \Longleftrightarrow [a] = [b],$$

d.h. wenn $\pi : (\mathbb{C}^{n+1})^* \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ die kanonische Projektion ist, dann erhält man mittels Φ_i einen Homoömorphismus (bijektiv + stetig + Φ_i^{-1} stetig) zwischen $\pi(V_i)$ und $\mathbb{C}^n$. Die Φ_i sind also Karten für $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$.
Wir müssen nun zeigen, daß die Kartenwechsel differenzierbar sind. Definiere $\alpha_i : \mathbb{C}^n \to \pi(V_i)$ durch

$$\alpha_i(z_1,\ldots,z_n) := \big[(z_1,\ldots,\underbrace{1}_{i},\ldots,z_n)\big].$$

Die Übergangsfunktionen sehen folgendermaßen aus ($z_i \cdot z_j \neq 0, j > i$):

$$\alpha_j^{-1} \circ \alpha_i(z_1, \ldots, z_n) = \alpha_j^{-1}\left[(z_1, \ldots, 1, \ldots, z_n)\right] = \left(\frac{z_1}{z_j}, \ldots, \frac{1}{z_j}, \ldots, \frac{\hat{z_j}}{z_j}, \ldots, \frac{z_n}{z_j}\right)$$

Neue Koordinaten entstehen aus den alten durch eventuelles Vertauschen und durch Teilen durch z_j. Damit definieren die angegebenen Koordinaten eine differenzierbare Struktur auf $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ (auch komplex differenzierbar). Die kanonische Projektion $\pi : (\mathbb{C}^{n+1})^* \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ ist eine Submersion, denn auf V_i ist die kanonische Projektion durch Abbildung

$$\Phi_i(z_0, \ldots, z_n) := \left(\frac{z_0}{z_i}, \ldots, \frac{\hat{z_i}}{z_i}, \ldots, \frac{z_n}{z_i}\right)$$

gegeben. $d\pi$ ist surjektiv, denn $\ker(d\pi)(z)$ ist der Tangentialraum in z an die komplexe Gerade $\{\lambda z \mid \lambda \in \mathbb{C}\}$.

Ebenso induziert π ein Vekorbündel, nämlich das komplexe Geradenbündel E über $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ (d.h. E ist ein 2-dimensionales reelles Vektorbündel über $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$, auf jeder Faser ist die Multiplikation mit i erklärt, die die Faser mit $\mathbb{C}$ identifizieren) wie folgt:

$$E = \{([z], \lambda z) \mid z \in (\mathbb{C}^{n+1})^*, \lambda \in \mathbb{C}\}$$

ist Teilmenge von $\mathbb{C}\mathrm{P}^n \times \mathbb{C}^{n+1}$, und man hat die kanonische Projektion $Pr : E \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$, wobei das Urbild die Struktur eines 1-dimensionalen komplexen Vektorraum besitzt, also hat jede Faser diese Struktur, und

$$Pr^{-1}([z]) = \{([z], \lambda z) \mid \lambda \in \mathbb{C}\}.$$

Diese Bündel heißt das *tautologische Bündel.*

Wir definieren jetzt eine Metrik auf $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$: Die Einschränkung der Projektion $\pi : (\mathbb{C}^{n+1})^* \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ auf $S^{2n+1} \subset (\mathbb{C}^{n+1})^*$ ist ebenfalls eine Submersion (die Normale an die Sphäre ist im Kern von π enthalten). $\pi : S^{2n+1} \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ heißt *Hopf-Faserung*. $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ ist kompakt, da S^{2n+1} kompakt ist. Es gilt also

$$\mathbb{C}\mathrm{P}^n = S^{2n+1}/S^1,$$

wobei S^1 eine einparametrige Gruppe von Isometrien ist, die auf S^{2n+1} via

$$(z, \theta) \mapsto e^{i\theta} z$$

operiert. Mit $\lambda = e^{i\theta}$ erhält man gerade, daß die Bahn von z auf S^{2n+1} unter dieser Gruppenoperation genau die Elemte der Äquivalenzklasse $[z] = \{\lambda z \mid \lambda \in \mathbb{C}\}$ von z enthält, die auch in S^{2n+1} liegen. Ist $\theta \in [0, 2\pi[\cong S^1$ fest, dann ist $\Psi_\theta : z \mapsto e^{i\theta} z$ eine lineare Isometrie von S^{2n+1} auf sich, die die Fasern der Hopf-Faserung invariant läßt. Also: Ist $\mathcal{V}$ das $1_{\mathbb{R}}$-dimensionale Vektorbündel, das tangential zu den Fasern ist, d.h. $\mathcal{V}_z = \mathrm{span}\{\frac{d}{dt} e^{it} z_{|t=0}\}$, dann liegt $\mathcal{V}$ im Tangentialbündel der Sphäre und $\mathrm{D}\Psi_\theta(\mathcal{V}) = \mathcal{V}$.

Außerdem wird $\mathcal{V}^\perp$ auf $\mathcal{V}^\perp$ abgebildet, denn: Für $z \in S^{2n+1}$ sei $\mathcal{H}_z$ das orthogonale Komplement von $\mathcal{V}_z$ in T_z^{2n+1}. Dann ist $z \mapsto \mathcal{H}_z$ ein Unterbündel des Tangentialbündels $T_z s^{2n+1}$. Weil die Faser $\mathcal{H}_z$ invariant unter $\{e^{i\theta}\}$ bleibt, bleibt auch $\mathcal{H}$ invariant. Für $z \in S^{2n+1}, \theta \in [0, 2\pi[\approx S^1$ ist $\mathrm{D}\Psi_{\theta|_{\mathcal{H}_z}} : \mathcal{H}_Z \to \mathcal{H}_{e^{i\theta} z}$ eine lineare Isometrie. Man weiß: $d\pi$ ist ein Submersion, und ihr Kern ist *transversal* zum Horizontalraum, d.h. $d\pi_{|_{\mathcal{H}_Z}} : \mathcal{H}_Z \to T_{\pi(z)}\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ ist ein linearer Isomorphismus (da $\mathcal{H}_Z \oplus \mathcal{V}_z = T_Z S^{2n+1}$ und $\ker d\pi_{|_Z} = \mathcal{V}_Z$ und $d\pi$ ist surjektiv).

Man kann also über $d\pi$ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ definieren. Zu zeigen bleibt, daß dieses Skalarprodukt nicht von dem Repräsentanten im Urbild abhängt. Das ist aber klar, denn man kann ja durch eine Isometrie jeden Punkt der Äquivalenzklasse in jeden anderen überführen. Definiere also für $z \in S^{2n+1}$

das Skalarprodukt $g_{\pi(z)}$ auf $T_{\pi(z)}\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ so, daß $d\pi_{\mathcal{H}_Z} : \mathcal{H}_Z \to T_{\pi(z)}\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ eine Isometrie bzgl. der Metrik auf $\mathcal{H}_Z$ ist.

$$z \in \pi^{-1}(w) \subset S^{2n+1} \xrightarrow{\pi} w \in \mathbb{C}\mathrm{P}^n.$$

Dies ist wohldefiniert, denn sind $z_1, z_2 \in \pi^{-1}(w)$, dann gibt es ein $\theta \in S^1$ mit $\Psi_\theta(z_1) = z_2$ (nach Voraussetzung). Dann ist $\mathrm{D}\Psi_\theta : \mathcal{H}_{Z_1} \to \mathcal{H}_{Z_2}$ eine Isometrie und

$$d\pi_{\mathcal{H}_{Z_1}} = d\pi \circ \mathrm{D}\Psi_{\theta|\mathcal{H}_{Z_1}} = d\pi_{\mathcal{H}_{Z_2}}.$$

$$\begin{tikzcd}
Z_1 \in \mathcal{H}_{Z_1} \arrow[rr, "\mathrm{D}\Psi_\theta"] \arrow[dr, "d\pi"'] & & \mathcal{H}_{Z_2} \ni Z_2 \arrow[dl, "d\pi"] \\
& T_w\mathbb{C}\mathrm{P}^n &
\end{tikzcd}$$

Man erhält also eine Riemannsche Metrik g auf $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$, die *Fubini-Study-Metrik*.

Definition 4.32. Seien $(M, g), (N, h)$ Riemannsche Mannigfaltigkeiten und $f : M \to N$ eine Submersion. Für $x \in M$ setze $\mathcal{V}_x$ = Tangentialraum in x an die Faser $f^{-1}(f(x))$ d.h. $V_x = \ker(\mathrm{D}f_{|T_xM}))$ (das ist eine Mannigfaltigkeit, da f Submersion) und $\mathcal{H}_x$ das orthogonale Komplement von $\mathcal{V}_x$ in (T_xM, g). f heißt *Riemannsche Submersion*, falls $\mathrm{D}f_{|\mathcal{H}_x} : \mathcal{H}_x \to T_{f(x)}N$ eine lineare Isometrie ist (bezüglich $g_{|H_x}$ und $h_{|T_{f(x)}N}$).

Beispiel: $\pi : S^{2n+1} \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ ist eine Riemannsche Submersion.

Bemerkung. Sei A eine Isometrie von S^{2n+1} (d.h $A \in \mathcal{O}(2n+2)$) so, daß $A \circ \Phi_\theta = \Phi_{\theta'} \circ A$ für jedes $\theta \in S^1$ mit geeignetem $\theta' \in S^1$, dann läßt A die Fasern invariant, d.h. A induziert eine Isometrie von $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ (dann muß nämlich der Tangentialraum invariant sein, das heißt $\mathcal{H}$ ist invariant, woraus folgt, daß die Riemansche Metrik auf $\mathcal{H}$ invariant ist). Obige Bedingung an A bedeutet, daß A mit der komplexen Multiplikation verträglich sein muß, d.h. A induziert Isometrie von $\mathbb{C}\mathrm{P}^n \iff A \in \mathcal{U}(n+1) \subset \mathcal{O}(2n+2)$. Also ist $U(n+1) \subset \mathrm{Iso}(\mathbb{C}\mathrm{P}^n$. $\mathcal{U}(n+1)$ ist die Untergruppe aller linearen Abbildungen A, für die $A(\lambda x) = \lambda A(x)\ \forall\ \lambda \in \mathbb{C}$, insbesondere $\lambda = i$ gilt.

$$J(x_1, y_1, x_2, y_2) \mapsto (-y_1, x_1, -y_2, x_2)$$

J beschreibt die Multiplikation mit i in $\mathbb{C}^2$ als Abbildung von $\mathbb{C}^2 = \mathbb{R}^4$ in sich.

$$\mathcal{U}(2) = \{A \in \mathcal{O}(4) \mid A \circ J = J \circ A\}.$$

Damit schiebt man offensichtlich die $1_\mathbb{C}$–linearen Unterräume in $\mathbb{C}^2$ herum.
Man kann die Aktion von $\mathcal{U}(n+1)$ auf $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ auch wie folgt auffassen:

$$\text{Für } A \in \mathcal{U}(n+1), z \in (\mathbb{C}^{n+1})^* \text{ setze } A([z]) = [Az].$$

(damit werden $1_\mathbb{C}$-dimensionale Unterräume in $1_\mathbb{C}$-dimesionale Unterräume überführt). Diese Aktion ist *transitiv*.

Die Isotropiegruppe (= die Unteruppe von $\mathcal{U}(n+1)$, welche ein $[z] \in \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ festläßt) von $\mathcal{U}(n+1)$ ist $\mathcal{U}(n)$, denn sie muß einen Kreis auf S^{2n+1} festlassen, und der Rest kann frei festgelegt werden.

$$\mathbb{C}^{n+1} = [z] \oplus \underbrace{[z]^\perp}_{\approx \mathbb{C}^n}$$

Man kann $\mathcal{U}(n)$ kanonisch einbetten durch

$$A \in \mathcal{U}(n) \hookrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & A & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \in \mathcal{U}(n+1).$$

$[z]^\perp$ ist dabei das reell-orthogonale Komlement von $\{z, iz\}$, iz ist der Tangentenvektor an den Kreis. $[z]^\perp$ kann mit dem Tangentialraum an $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ identifiziert werden.
Vorsicht: $\mathcal{U}(n)$ bildet nicht jeden $2_{\mathbb{R}}$-dimensionalen Unterraum in jeden anderen $2_{\mathbb{R}}$-dimensionalen Unterraum ab. Wir erhalten z.B. nie aus einem $1_{\mathbb{C}}$-dimensionalen Unterraum einen reellen $2_{\mathbb{R}}$-dimensionalen Unterraum der Form $\operatorname{span}\{(1,0,\dots,0),(0,0,1,0,\dots,0)\}$

Definition 4.33. $TM = \mathcal{V} \oplus \mathcal{H}$. Dann heißt $\mathcal{H}$ das *Horizontalbündel* und $\mathcal{V}$ das *Vertikalbündel.*

Man möchte jetzt von der Geometrie (z.B. Geodätische, Krümmung) von M auf die Geometrie von N schließen und umgekehrt. So werden z.B. unter einer Riemannschen Submersion f die Kurven nicht länger. Man kann also erwarten, daß wenn man zu einer Geodätischen γ in N eine Kurve im Horizontalbündel von M findet, die unter Projektion auf γ abgebildet wird, daß diese dann ebenfalls eine Geodätische sein muß und zwar in M.

Satz 4.34. *Sei $f : (M,g) \to (N,h)$ eine Riemansche Submersion.*

(i) *Wenn $X \in \mathcal{H}_p$ und $c : (-\epsilon,\epsilon) \to M$ Geodätische mit $c'(0) = X$, dann ist $c'(t) \in \mathcal{H}_{c(t)}$ für alle t und $f \circ c$ eine Geodätische in N derselben Länge.*

(ii) *Ist $\gamma : (-\epsilon,\epsilon) \to N$ Geodätische, $p \in f^{-1}(\gamma(0))$ und $X \in H_p$ mit $\mathrm{D}f(X) = \gamma(0)$, dann existiert genau eine horizontale Geodätische $\tilde\gamma$ mit $f \circ \tilde\gamma = \gamma$.*

(iii) *Wenn M vollständig ist, dann auch N.*

Beweis. Zu i): sind $\tilde d$ bzw d die von den Metriken induzierten Abstände auf M bzw. N, dann gilt

$$d\big(f(p), f(q)\big) \le \tilde d(p,q) \quad \forall\, p,q,$$

denn sei $c : I \to M$ eine Kurve von p nach q, dann schreibe $c'(t) = X'(t) + Y'(t)$ mit $X'(t) \in \mathcal{H}_{c(t)}$ und $Y'(t) \in \mathcal{V}_{c(t)}$, dann folgt

$$\begin{aligned} \ell(c) &= \int_I \big(g\big(X(t),X(t)\big) + g\big(Y(t),Y(t)\big)\big)^{\frac12}\, dt \quad \text{da } X, Y \text{ senkrecht} \\ &\ge \int_I ||X(t)||_g\, dt \\ &= \int_I ||(f \circ c)'(t)||\, dt. \end{aligned}$$

Zu ii) Sei $c : I \to N$ eine minimale Geodätische. $f^{-1}\big(c(I)\big)$ ist Untermannigfaltigkeit von M, da f Submersion. Definiere das Vekorfeld Z auf $f^{-1}\big(c(I)\big)$ wie folgt: Für $x \in f^{-1}\big(c(I)\big)$ sei $Z(x) \in \mathcal{H}_x$ der Vektor,

der auf $c'(t)$ projiziert wird. (existiert, da f eingeschränkt auf $f^{-1}\big(c(I)\big)$ Submersion). Für $p \in f^{-1}\big(c(I)\big)$ sei $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to f^{-1}\big(c(I)\big)$ die Integralkurve von Z durch $p = \gamma(0)$. γ hat überall horizontale Tangenten, denn $\gamma'(t) = Z\big(\gamma(t)\big)$, also ist $\mathrm{D}f\big(\gamma'(t)\big) = c'(t)$ für ein $t \in I$. Man erhält also für die projizierte Kurve eine Differentialgleichung. $f \circ \gamma$ stimmt bis auf Umparametrisierung mit c überein. Da die Tangenten auch gleich bleiben, stimmen beide sogar bis auf Translation im Parameterintervall überein. γ ist minimale Geodätische in M, da f abstandsverkleinernd ist und γ und $f \circ \gamma$ dieselbe Länge haben.
Wähle also zu $X \in \mathcal{H}$ eine Geodätische c in N mit $c'(0) = \mathrm{D}f(X)$. Finde nach i) eine horizontale Geodätische in M, die $\gamma(0) = p$ und $f \circ \gamma = c$ erfüllt. Dann hat man durch die vorgegebene Anfangsrichtung eine eindeutig bestimmte Geodätische γ gefunden. Hieraus folgt i).

Zu iii) M vollständig $\Longleftrightarrow$ M geodätisch vollständig $\Longrightarrow$ N geodätisch vollständig. $\square$

Bemerkung: Die Rückrichtung von 3) gilt im allgemeinem nicht, denn sei z.B. $M = A \times N$, dann kann man wohl aus $\pi : M \to N$ schließen, daß mit M auch N vollständig ist, umgekehrt jedoch nicht, denn A muß natürlich nicht vollständig sein.

Beispiel 4.35. $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$. Für $z \in S^{2n+1}$ suche eine horizontale Tangente. Die Hopf-Fasern sind Schnitte von S^{2n+1} mit $1_{\mathbb{C}}$–dimensionalen Unterräumen, die z enthalten. Senkrecht darauf steht iz, also iz tangential an S^{2n+1} und an die Faser. Das ist also die falsche Richtung. Definiere $V_z = \mathrm{span}\{iz\} = [iz]$, sei $X \in T_z S^{2n+1}$ so, daß $X \perp \{z, iz\}$, und $\|X\| = 1$. Wir können dann X als Ortsvektor in $\mathbb{R}^{2n+2}$ auffassen, also als Punkt von S^{2n+1}.
Dann ist die Horizontale Geodätische durch X

$$t \to (\cos t)z + (\sin t)X \quad (\|X\| = 1).$$

Durch Projektion erhält man die Geodätische

$$t \to [(\cos t)z + (\sin t)X]$$

in $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ derselben Länge. Setze $t = \pi$, dann geht die Kurve von z nach $(\cos \pi)z + (\sin \pi)X = -z$, man erhält also zur Länge π eine geschlossene Geodätische ($z \sim -z$) in $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$. Also ist jede Geodätische in $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ geschlossen, und der erste Punkt, wo man wieder in derselben Äquivalenzklasse landet, ist der Antipodenpunkt. $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ ist *Wiedersehensraum.*

Bemerkung. Weitere Wiedersehensräume sind z.B die Sphäre konstanter Krümmung und der $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$.

Beispiel 4.36. (i) $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$, $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}\mathrm{P}^1 = 2$. Auf dem $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ operiert die Isometriegruppe $\mathcal{U}(2)$ transitiv. Sie kommutiert mit der komplexen Multiplikation. Horizontalbündel und Metrik werden invariant gelassen. Man hat also eine 2-dimensionale Mannigfaltigkeit mit einer transitiven Isometriegruppe. Die Krümmungsebenen für die Schnittkrümmung sind aber auch 2-dimensional, und man kann sie isometrisch überall hinschieben. Also ist die Krümmung konstant.
Sei $p = (1,0,0,0) \in S^3, X = (0,0,1,0) \in \mathcal{H}_p$ tangential an die Sphäre, $iX = (0,0,0,1) \in \mathcal{H}_p$. Horizontale Großkreise sind

$$\begin{aligned} c_1(t) &= (\cos t)p + (\sin t)X \\ c_2(t) &= (\cos t)p + (\sin t)iX \end{aligned}$$

Es gilt

$$\big[c_1(\tfrac{\pi}{2})\big] = [X] = [iX] = \big[c_2(\tfrac{\pi}{2})\big].$$

Daraus folgt, daß Geodätische auf $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$, die von demselben Punkt p starten, sich in $c(\frac{\pi}{2})$ treffen, damit ist die Geometrie dieselbe, wie die der Sphäre mit konstanter Krümmung 4.
Bemerkung: 2–dimensionale Mannigfaltigkeiten mit gleicher konstanter Krümmung sind lokal isometrisch. Also kann man $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ mit der Sphäre konstanter Krümmung 4 identifizieren.
Bemerkung: $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ ist orientiert, denn auf $T\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ ist eine "fast komplexe Struktur" J erklärt: für $p \in \mathbb{C}\mathrm{P}^1$ ist J linearer Isomorphismus von $T\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ mit $J^2 = \mathrm{Id}$.
J ist definiert wie folgt: wähle $x \in S^3$ mit $\pi(x) = p$. Auf $\mathcal{H}_x$ ist die Multipikation mit i erklärt (da $\mathcal{H}_x$ als orthogonales Komplement eines $1_{\mathbb{C}}$–dimensionalen Unterraums wieder ein $1_{\mathbb{C}}$-dimensionaler Unterraum von $\mathbb{C}^2$ ist, also eine komplexe Struktur besitzt). Definiere

$$J\big(\mathrm{D}\pi(X)\big) = \mathrm{D}\pi(iX) \quad \text{für } X \in \mathcal{H}_x.$$

Diese Definition hängt nicht von $x \in \pi^{-1}(p)$ ab, denn für $y \in \pi^{-1}(p)$ existiert ein $\theta \in [0, 2\pi]$ mit $y = e^{i\theta}x$.Der Diffeomorphismus $\Phi_\theta : S^3 \to S^3, \Phi_\theta(x) = e^{i\theta}x$ läßt $\mathcal{H}_x$ und seine komplexe Struktur (d.h. die Multiplikation mit i) invariant, $\mathcal{H} = \mathcal{H}_x \cong \mathcal{H}_y$ als linearer Unterraum von $\mathbb{C}^2$. Auf $\mathcal{H}$ operiert $\mathrm{D}\Psi_\theta$ ebenfalls durch Multiplikation mit $e^{i\theta}$, die mit der Multiplikation mit i kommutiert. Also ist die Kreisaktion mit der komplexen Multiplikation verträglich und J hängt nur von der Wahl der Äquivalenzklasse $\pi^{-1}(p)$ ab und nicht von $x \in \pi^{-1}(p)$.
Definiere Basis $\{X, JX\}$ von $T\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ als positiv orientiert. Damit ist der $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ orientiert.

(ii) a) $n \geq 2, p \in S^{2n+1}, X \perp \{p, ip\}, X \in \mathcal{H}_p$. X spannt einen $1_{\mathbb{C}}$–dimensionalen Unterraum auf. Betrachte die Sphäre, die durch $S^{2n+1} \cap \{\mathbb{C}-\text{Span von } p \text{ und } X\}$ entsteht: p und X sind linear unabhängig über $\mathbb{C}$, spannen also einen $2_{\mathbb{C}}$-dimensionalen Unterraum $\mathbb{C}^2 \subset \mathbb{C}^{n+1}$ auf. $\mathbb{C}^2 \cap S^{2n+1} = S^3 \subset S^{2n+1}$ ist invariant unter der Aktion von S^1 und totalgeodätisch in S^{2n+1}. Also ist $\pi(S^3) \subset \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ totalgeodätisch eingebettete Sphäre konstanter Krümmung 4.
Fazit: Mit der wie eben definierten fast komplexen Struktur J auf $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ gilt: Ist $X \neq 0, X \in T\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ und E der von $\{X, JX\}$ aufgespannte Unterraum, dann ist E tangential zum totalgeodätisch eingebetten $\mathbb{C}\mathrm{P}^1 \subset \mathbb{C}\mathrm{P}^n$, und

$$\pi(\mathbb{C}^2 \cap S^{2n+1}) = \pi(S^3) = \mathbb{C}\mathrm{P}^1 \subset \pi(S^{2n+1}).$$

b) $n = 2$. Sei $p \in S^{2n+1}, X \perp \{p, ip\}, X \in \mathcal{H}_p$ (z.B. $p = (1,0,0,0,0,0), X = (0,0,1,0,0,0)$) und $Y \perp \{p, ip, X, iX\} \Longrightarrow Y \perp [p, X]_{\mathbb{C}} = 2_{\mathbb{C}}$-dimensionaler Unterraum. Sei $S^2 \subset S^{2n+1}$ totalgeodätisch eingebette Sphäre mit $p \in S^2, X, Y$ reelle Vektoren, $T_pS^2 = \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{X, Y\} = [X, Y]_{\mathbb{R}}$.
Behauptung: S^2 ist überall senkrecht zum Orbit der Kreisgruppe, d.h. TS^2 ist überall in $\mathcal{H}$ enthalten. (Zu p ist ip der vertikale Teil, da aber $Y \perp \{X, iX\}$ ist, hat man einen Punkt auf S^2, der eine reelle Linearkombination von X und Y ist). Die Punkte auf der S^2 sind reelle Linearkombinationen von X, Y, p: Für $z \in S^2, z = ap + bX + cY (|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 = 1)$ ist die Tangente an den Orbit von S^1 gerade iz. ip, iY, iX sind senkrecht zu p, X, Y, also ist $z \perp TS^2$. $T_zS^2 = \{z^\perp \subset \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{p, X, Y\}, V_z = T_zS^{2n+1} = \mathrm{span}\{iz\}$, damit ist

$$V_z = TS^{2n+1} \perp T_zS^2 \quad \text{und} \quad S^2 \perp V.$$

Damit wird S^2 zu einem totalgeodätischen $\mathbb{R}\mathrm{P}^2 \subset \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ konstanter Krümmung 1.
Also liegt die Krümmung von $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ zwischen 1 und 4.

Lemma 4.37. *Sei $f : M \to N$ eine Riemannsche Submersion und X ein Vektorfeld auf N, dann existiert genau ein Vektorfeld $\tilde{X}$ auf M, so daß gilt*

(i) $\tilde{X}(p) \in \mathcal{H}_p$

(ii) $\mathrm{D}f(\tilde{X}_p) = X_{f(p)}$.

$\tilde{X}$ *heißt* horizontaler Lift *von* X.

Beweis. Man hat über jedem Punkt einen Horizontalraum, aus dem man einen Vektor auf den Startvektor von X projizieren kann, daher gibt es zu $p \in M$ genau ein Vektorfeld $\tilde{X} \in \mathcal{H}_p$ mit $\mathrm{D}f(\tilde{X}(p)) = X_{f(p)}$ (nach der Definition von Submersion). Damit ist man aber auch schon fertig. $\square$

Definition 4.38. Ein Vektorfeld $\overline{X}$ auf M heißt *projezierbar* zu einem Vektorfeld X auf N, falls

$$\mathrm{D}f\big(\tilde{X}(p)\big) = X\big(f(p)\big) \quad \text{für alle } p.$$

Bemerkung. $\overline{X}$ ist projizierbar zu $X :\Longleftrightarrow \overline{X} = \tilde{X} + Y, \quad Y$ vertikal.

Wir wollen nun den Levi–Civita–Zusammenhang übertragen. Riemannsch bleibt unter der Projektion erhalten. Um die Torsionsfreiheit zu zeigen, muß man einen Zusammenhang zwischen den Lie-Klammern finden.

Lemma 4.39. *Seien $\overline{X}$ zu X und $\overline{Y}$ zu Y projizierbar, dann ist $[\overline{X}, \overline{Y}]$ zu $[X, Y]$ projizierbar.*

Beweis. Sei $\varphi : N \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion. Setze $\tilde{\varphi}(p) = f^*(\varphi) := \varphi\big(f(p)\big)$. Dies definiert eine glatte Funktion auf M. Für einen Schnitt Z von $\mathcal{V}$ gilt $Z(\tilde{\varphi}) \equiv 0$ (Ableitung in Richtung von Kurven tangential zu Z).

$$\overline{X} \text{ projizierbar zu } X \Longleftrightarrow \forall\, \varphi \text{ und } \forall\, p \in M \text{ gilt } \big(\tilde{X}(\tilde{\varphi})\big)(p) = \big(X(\varphi)\big)(f(p)\big).$$

Sind $\overline{X}, \overline{Y}$ projizierbar zu X, Y, dann gilt

$$\begin{aligned}
[\overline{X}, \overline{Y}](\tilde{\varphi})(p) &= \big(\overline{X}\big(\overline{Y}(\tilde{\varphi})\big) - \overline{Y}\big(\overline{X}(\tilde{\varphi})\big)\big)(p) \\
&= \overline{X}\big(p \mapsto Y(\varphi)\big(f(p)\big)\big) - \overline{Y}\big(p \mapsto X(\varphi)\big(f(p)\big)\big) \\
&= X\big(Y(\varphi)\big)\big(f(p)\big) - Y\big(X(\varphi)\big)\big(f(p)\big) \\
&= [X, Y](\varphi)\big(f(p)\big)
\end{aligned}$$

$\square$

Fazit: $[\tilde{X}, \tilde{Y}] = \widetilde{[X, Y]} + [\tilde{X}, \tilde{Y}]^{\mathcal{V}}$, wobei für $Z \in TM$ gelte $Z = Z^{\mathcal{H}} + Z^{\mathcal{V}}$ mit $Z^{\mathcal{V}} \in \mathcal{V}, Z^{\mathcal{H}} \in \mathcal{H}$.

Satz 4.40. *Seien X, Y Vektorfelder auf N, $\overline{X}, \overline{Y}$ horizontale Lifts, und ∇^N (bzw. ∇^M) der Levi–Civita–Zusammenhang in N (bzw. M). Dann gilt*

$$\nabla^M_{\overline{X}} \overline{Y} = \nabla^{\tilde{N}}_X Y + \tfrac{1}{2}[\overline{X}, \overline{Y}]^{\mathcal{V}}.$$

Beweis. Seien X, Y, Z Vektorfelder in N und $\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}$ ihre Lifts. Dann gilt

$$\begin{aligned}
g(\nabla^M_{\tilde{X}} \tilde{Y}, Z) &= \tfrac{1}{2}\big\{\tilde{X} g(\tilde{Y}, \tilde{Z}) + \tilde{Y} g(\tilde{Z}, \tilde{X}) - \tilde{Z} g(\tilde{X}, \tilde{Y}) \\
&\quad + g\big([\tilde{X}, \tilde{Y}], \tilde{Z}\big) - g\big([\tilde{X}, \tilde{Z}], \tilde{Y}\big) - g\big([\tilde{Y}, \tilde{Z}], \tilde{X}\big)\big\} \\
&= \tfrac{1}{2}\big\{X g(Y, Z) + Y g(Z, X) - Z g(X, Y) \\
&\quad + g\big([X, Y], Z\big) - g\big([X, Z], Y\big) - g\big([Y, Z], X\big)\big\} \\
&= g(\nabla^N_X Y, Z), \text{ (da unter } g \text{ der vertikale Anteil wegfällt.)}
\end{aligned}$$

Sei T ein vertikales Vektorfeld auf M. Dann gilt

$$\begin{aligned}
g(\nabla^M_{\tilde{X}} \tilde{Y}, T) &= \tfrac{1}{2}\big\{g\big([\tilde{X}, \tilde{Y}], T\big) - g\big([\tilde{X}, T], \tilde{Y}\big) - g\big([\tilde{Y}, T], \tilde{X}\big)\big\} \\
&= \tfrac{1}{2} g\big([\tilde{X}, \tilde{Y}], T\big)
\end{aligned}$$

Denn nach Lemma 4.39 ist $[\tilde{X}, T]$ vertikal (denn T ist projizierbar zu 0 und $[\tilde{Y}, T]$ zu $[Y, 0] = 0$). $\square$

Bemerkung. Der Defekt zwischen ∇^N und ∇^M wird durch die Lieklammer beschrieben.

Frage: Gibt es zu $x \in M$ eine (lokale) Untermannigfaltigkeit (Unterbündel) $B_x \subset M$ so, daß $\mathcal{H}$ tangential zu B_x liegt, d.h. daß gilt

$$T_y B = \mathcal{H}_y \quad \forall\, y \in B.$$

Die Antwort ist Ja, falls die Dimension von $\mathcal{H}$ gleich 1 ist, denn sei $U \subset M$ eine Umgebung von $x \in M$, $X : U \to \mathcal{H}$ ein Schnitt so, daß $\pi \circ X = \mathrm{Id}$, für die kanonische Projektion $\pi : \mathcal{H} \to U$. Sei $X(y) \neq 0$ für $y \in U$. (lokale Trivialisierung von $\mathcal{H}$). Das Vektorfeld X kann man integrieren, wir haben durch X eine Differentialgleichung 1. Ordnung gegeben, und erhalten eine Lösungskurve $c_p : (-\epsilon, \epsilon) \to U$ mit $c_p'(t) = X(c_p(t))$. Diese Kurve hat nach Definition von X überall eine nichttriviale Tangente, liefert also eine lokale Untermannigfaltigkeit von M. Also ist $c_p(-\epsilon, \epsilon) \subset M$ eine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit von M, so daß

$$T_{c_p(t)}(c_p(-\epsilon, \epsilon)) = \mathcal{H}_{c(p)}.$$

Für Dimensionen ≥ 2 haben wir die notwendige Bedingung: Wenn B existiert, dann ist $\mathcal{H}$ *integrabel*, d.h. sind X, Y Schnitte von $\mathcal{H}$, dann auch $[X, Y]$.

Satz 4.41. *(von Frobenius) Die Integrabilität von $\mathcal{H}$ ist notwendig und hinreichend für die Existenz einer Untermannigfaltigkeit B von M, die tangential zu $\mathcal{H}$ ist und für die $\dim B = \dim \mathcal{H}$ gilt.*

Satz 4.42. *(O'Neill Formel) Sei $f : M \to N$ eine Riemannsche Submersion. Dann gilt*

$$\begin{aligned} &g(R^M(\tilde{X}, \tilde{Y})\tilde{Z}, \tilde{W}) - g(R^N(X, Y)Z, W) \\ &\quad = \tfrac{1}{4} g([\tilde{X}, \tilde{Z}]^{\mathcal{V}}, [\tilde{Y}, \tilde{W}]^{\mathcal{V}}) - \tfrac{1}{4} g([\tilde{Y}, \tilde{Z}]^{\mathcal{V}}, [\tilde{X}, \tilde{W}]^{\mathcal{V}}) + \tfrac{1}{2} g([\tilde{Z}, \tilde{W}]^{\mathcal{V}}, [\tilde{X}, \tilde{Y}]^{\mathcal{V}}). \end{aligned}$$

Insbesondere gilt für X, Y orthonormal:

$$K(span\{X, Y\}) = K(span\{\tilde{X}, \tilde{Y}\}) + \tfrac{3}{4} \left\| [\tilde{X}, \tilde{Y}]^{\mathcal{V}} \right\|.$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} g(\nabla^M_{\tilde{X}} \nabla^M_{\tilde{Y}} \tilde{Z}, \tilde{W}) = &= \tilde{X} g(\nabla^M_{\tilde{Y}} \tilde{Z}, \tilde{W}) - g(\nabla^M_{\tilde{Y}} \tilde{Z}, \nabla^M_{\tilde{X}} \tilde{W}) \\ &= X g(\nabla^N_Y Z, W) - g(\nabla^N_Y Z, \nabla^N_X W) - \tfrac{1}{4} g([\tilde{Y}, \tilde{Z}]^{\mathcal{V}}, [\tilde{X}, \tilde{W}]^{\mathcal{V}}) \\ &= g(\nabla^N_X \nabla^N_Y Z, W) - \tfrac{1}{4} g([\tilde{Y}, \tilde{Z}]^{\mathcal{V}}, [\tilde{X}, \tilde{W}]^{\mathcal{V}}) \\ g(\nabla^M_{[\tilde{X}, \tilde{Y}]} \tilde{Z}, \tilde{W}) &= g(\nabla^M_{[\tilde{X}, \tilde{Y}]^{\mathcal{H}}} \tilde{Z}, \tilde{W}) + g(\nabla^M_{[\tilde{X}, \tilde{Y}]^{\mathcal{V}}} \tilde{Z}, \tilde{W}) \\ &= g(\nabla^N_{[X, Y]} Z, W) + g(\nabla^N_{[\tilde{X}, \tilde{Y}]^{\mathcal{V}}} \tilde{Z}, \tilde{W}) \end{aligned}$$

setze $T = [\tilde{X}, \tilde{Y}]^{\mathcal{V}}$. Somit gilt

$$\nabla^M_T \tilde{Z} = \nabla^M_{\tilde{Z}} T + \underbrace{[T, \tilde{Z}]}_{\in \mathcal{V}}$$

also

$$\begin{aligned} g(\nabla^M_T \tilde{Z}, \tilde{W}) &= g(\nabla^M_{\tilde{Z}} T, \tilde{W}) \\ &= \tilde{Z}.g(T, W) - g(T, \nabla_{\tilde{Z}} \tilde{W}) \\ &= -g([\tilde{X}, \tilde{Y}]^{\mathcal{V}}, \tfrac{1}{2}[\tilde{Z}, \tilde{W}]^{\mathcal{V}}) \end{aligned}$$

$\square$

Bemerkung. Aus diesem Satz geht hervor, daß die Krümmung nur größer, aber nicht kleiner werden kann. Die Differenz hängt von der Lieklammer ab.

Am Beispiel von $S^{2n+1} \to S^{2n+1}/S^1 = \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ kann man dies auch ausrechnen. Wie wir wissen, operiert die $\mathcal{U}(n+1)$ als Isometriegruppe transitiv auf dem $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$. Die Isotropiegruppe ist

$$\left\{ A \in \mathcal{U}(n+1) \mid A = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & \\ & A \in \mathcal{U}(n) \end{pmatrix}, \theta \in \mathbb{R} \right\}.$$

$\Longrightarrow$ Man kann den $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ auch als Menge der Orbiten von $\mathcal{U}(1)$ darstellen:

$$\mathbb{C}\mathrm{P}^n = \mathcal{U}(n+1)/(\mathcal{U}(1) \times \mathcal{U}(n).$$

Wir haben also eine Darstellung, die zeigt, daß der $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ eine Mannigfaltigkeit ist, welche als Quotient von Gruppen wiederum eine Gruppe ist.
Mannigfaltigkeiten, die außerdem noch eine Gruppenstruktur haben, spielen eine größere Rolle. Diese betrachten wir daher gesondert im nächsten Kapitel.

5. Liegruppen und homogene Räume

Definition 5.1. Eine *Liegruppe* ist eine Gruppe G, die gleichzeitig eine differenzierbare Mannigfaltigkeit ist, so daß die Gruppenoperation

$$\begin{aligned} G \times G &\to G \\ (a,b) &\mapsto ab^{-1} \end{aligned}$$

differenzierbar ist.

Beispiel 5.2. (i) $\mathrm{GL}(n) \subset \mathbb{R}^{n^2}$ ist eine offene Teilmenge, also eine Mannigfaltigkeit. Die Gruppenoperation ist differenzierbar (da Summen und Produkte differenzierbar sind). (Anmerkung: Jede offene Teilmenge eines Vektorraums ist eine Mannigfaltigkeit)

(ii) $\mathcal{O}(n) \subset \mathrm{GL}(n)$ ist eine Untermannigfaltigkeit, also eine Liegruppe.

Beweis. $\mathcal{O}(n) = \{A \in \mathrm{GL}(n) \mid AA^t = \mathrm{Id}\} = f^{-1}(\mathrm{Id})$, wobei $f(A) = AA^t$. $f : \mathrm{GL}(n) \to \mathrm{Sym}(n)$, wobei $\mathrm{Sym}(n)$ der Vektorraum (der Dimension $\frac{n(n+1)}{2}$) der symmetrischen $(n \times n)$-Matrizen ist. Zu zeigen: df hat maximalen Rang auf $f^{-1}(\mathrm{Id})$ (also f ist dort eine Submersion). Sei $A \in \mathcal{O}(n)$, $H \in T_A\mathrm{GL}(n) = \mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$ $(n \times n)$-Matrizen. Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f(A+tH)_{|t=0} &= \tfrac{d}{dt}\left((A+tH)\cdot(A+tH)^t\right)_{|t=0} \\ &= \tfrac{d}{dt}(A^2 + t(AH^t + HA^t) + t^2HH^t)_{|t=0} \\ &= AH^t + HA^t \end{aligned}$$

Wenn H symmetrisch ist, dann ist $\mathrm{D}f(\frac{HA}{2}) = H$, denn $\mathrm{D}f(\frac{HA}{2}) = A(\frac{HA}{2})^t + (\frac{HA}{2})A^t = H$. Also hat df maximalen Rang und $\mathcal{O}(n)$ ist eine Liegruppe. ☐

Bemerkung. $\mathcal{SO}(2) = S^1 \subset \mathbb{C}$ ist Gruppe. Ein Gruppenhomomorphismus ist die Exponentialabbildung

$$\begin{aligned} \exp : \mathbb{R} &\to \mathcal{SO}(2) = S^1 \\ \exp(\theta) &= e^{i\theta} \quad (= \text{Rotation um den Winkel } \theta) \\ &= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \\ \exp(\tfrac{\pi}{2}) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Fasse $\mathbb{R}$ als Vektoraum aller antisymmetrischen (2×2)-Matrizen auf via

$$t \mapsto \begin{pmatrix} 0 & t \\ -t & 0 \end{pmatrix} = tA \quad \text{wobei } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \exp(i\theta) &= \sum_0^\infty \frac{(i\theta)^k}{k!} \\ \exp(tA) &= \sum_0^\infty \frac{(tA)^k}{k!} \end{aligned}$$

Damit ist man nicht mehr auf die komplexe Notation angewiesen. Es ist auch in $\mathcal{O}(n)$ ganz praktisch, die Rotation um 2 Koordinatenachsen so zu bezeichnen.

Definition 5.3. Die *Matrizen–Exponentialabbildung* exp ist definiert durch

$$\begin{aligned} \exp : \operatorname{End}(\mathbb{R}^n) &\to \operatorname{GL}(n) \\ A &\mapsto \exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}. \end{aligned}$$

Satz 5.4. (i) $\exp(A^t) = (\exp A)^t$.
(ii) $\exp(TAT^{-1}) = T(\exp A)T^{-1}$ *für* $T \in GL(n)$.
(iii) *Wenn* $A \cdot B = B \cdot A$, *dann gilt* $\exp(A+B) = \exp(A) \cdot \exp(B)$.
(iv) $\exp(A) \cdot \exp(-A) = \mathrm{Id}$.
(v) exp *bildet Umgebungen von 0 in* $End(\mathbb{R}^n)$ *diffeomorph auf Umgebungen von* Id *in* $GL(n)$ *ab.*

Beweis. (i) klar.
(ii) $(TAT^{-1})^k = TA^kT^{-1}$.
(iii) Wenn $AB = BA$, dann gilt $(A+B)^k = \sum \binom{k}{j} A^j B^{k-j}$.
(iv) folgt sofort aus 3.
(v) $\frac{d}{dt}\exp(tA)_{|t=0} = \frac{d}{dt}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(tA)^k}{k!}_{|t=0} = \frac{d}{dt}(\mathrm{Id} + tA + o(t))_{|t=0} = A$. Also ist exp in Id von maximalem Rang differenzierbar.

□

Bemerkung. Aus $\exp(A) \cdot \exp(A)^t = \mathrm{Id}$ folgt $A^t = -A$, d.h. A ist antisymmetrisch. Also bildet exp den Vektorraum der antisymmetrischen Matrizen $\Lambda^2(n)$ in $\mathcal{O}(n)$ ab. Da $\operatorname{GL}(n) = \operatorname{Sym}(n) \oplus \Lambda^2(n)$ gilt

$$\dim \mathcal{O}(n) = \dim \operatorname{GL}(n) - \dim(\operatorname{Sym}(n)) = n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \dim(\text{VR der antisym. Matrizen}).$$

Aber: $\exp(\operatorname{Sym}(n)) \subset \operatorname{Sym}(n)$.
Also ist die Einschränkung von exp auf $\Lambda^2(n) =$ Vektorraum der antisymmetrischen Endomorphismen ein lokaler Diffeomorphismus (nahe 0) auf Umgebung der Id in $\mathcal{O}(n)$.

Sei G eine Liegruppe: wenn $g \in G$, dann ist die Linkstranslation $L_g : G \to G$ mit g, definiert durch $L_g(h) := g \cdot h$, ein Diffeomorphismus von G auf sich.
Wenn $U \subset G$ eine Umgebung von e ist, dann ist L_gU eine Umgebung von g, d.h. für $G = \mathcal{O}(n)$ haben wir Koordinaten nahe g mittels

$$X \in \Lambda^2(n) \to g \cdot \exp X.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \exp A \cdot \exp B &= \exp(A+B), \quad \text{falls } A \text{ und } B \text{ kommutieren} \\ (\exp(sA) \cdot (\exp(tA) &= \exp(t+s)A \quad s, t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Das heißt, die Abbildung $t \mapsto \exp tA$ ist ein Gruppenhomomorphismus von $\mathbb{R}$ in $\operatorname{GL}(n)$. Setze exp mittels $\exp(\epsilon + s)A = \exp \epsilon A + \exp sA = L_{\exp \epsilon A} \exp sA$ auf $\mathbb{R}$ fort. Dann folgt: die Tangente in $\exp \epsilon A$ von dem Bild des Homomorphismus ist $\mathrm{D}L_{\exp \epsilon A} A$.

Definition 5.5. Eine *Liealgebra* $\mathfrak{L}$ ist ein (reeller) Vektorraum, versehen mit einer bilinearen Abbildung $[\cdot,\cdot] : \mathfrak{L} \times \mathfrak{L} \to \mathfrak{L}$, so daß gilt:

(i) $[X,Y] = -[Y,X] \quad \forall X,Y \in \mathfrak{L}$
(ii) $\big[[X,Y],Z\big] + \big[[Y,Z],X\big] + \big[[Z,X],Y\big] = 0 \quad \forall X,Y,Z \in \mathfrak{L}$ (Jabobi–Identität)

Satz 5.6. *Sei G eine Liegruppe. Ein* linksinvariantes Vektorfeld X *auf G ist ein Vektorfeld X, welches invariant unter der Linkstranslation $L_g (g \in G)$ ist, d.h.*

$$X(g \cdot h) = \mathrm{D}L'_g\big(X(h)\big) = \mathrm{D}L_{g \cdot h}\big(X(e)\big).$$

Die linksinvarianten Vektorfelder bilden eine Liealgebra $\mathfrak{g}$, welche als Vektorraum natürlich isomorph zu T_eG ist.

Beweis. Ist X linksinvariant, dann gilt $X(g) = \mathrm{D}L_g(X(e))$, d.h. X ist durch $X(e)$ eindeutig bestimmt. Andererseits: Zu $X_0 \in T_eG$ definiere ein Vektorfeld X auf G durch $X(g) := \mathrm{D}L_g(X_0)$. X ist linksinvariant, denn

$$X(gh) = \mathrm{D}L_{gh}(X_0) = \mathrm{D}L_g(\mathrm{D}L_h X_0) = \mathrm{D}L_g\big(X(h)\big).$$

Behauptung: Die Menge der linksinvarianten Vektorfelder ist eine Lie-Unteralgebra der Menge aller Vektorfelder, also die Lieklammer $[\cdot,\cdot]$ erhält die Linksinvarianz.
Beweis: Seien X, Y Vektorfelder, Dann gilt

$$[X,Y](g) = [\mathrm{D}L_g X_e, \mathrm{D}L_g Y_e](g) = \mathrm{D}L_g[X,Y](g),$$

denn L_g ist ein Diffeomorphismus von G. □

Beispiel 5.7. Berechnung der Lieklammer von $\mathfrak{gl}(n)$ d.h. der Liealgebra von $\mathrm{GL}(n)$. Als Vektorraum gilt $\mathfrak{gl}(n) \cong \mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$. Seien X, Y linksinvariante Vektorfelder auf $\mathrm{GL}(n)$. Dann sind Integralkurven von X (bzw. Y) durch g (d.h. $X(g)$ ist tangential zu der Kurve) gegeben durch

$$t \mapsto g \cdot \exp tX(\mathrm{Id}),$$

denn $t \mapsto \exp tX_0$, $(X_0 := X(\mathrm{Id}))$ ist ein Homomorphismus von $\mathbb{R}$ in $\mathrm{GL}(n)$ und

$$\tfrac{d}{dt}(\exp tX_0)_{|t=0} = X_0,$$

und damit

$$\tfrac{d}{dt}(\exp tX_0)_{|t=s} = \mathrm{D}L_{\exp sX_0}(X_0).$$

Somit hat man explizite Ausdrücke für die Integralkurven. Sei $f : U \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion und U eine Umgebung von $\mathrm{Id} = e$, dann gilt

$$
\begin{aligned}
[X,Y](f)(e) &= \big(X\big(Y(f)\big) - Y\big(X(f)\big)\big)(e) \\
&= \frac{d}{dt} Y(f) \underbrace{\left(\sum_k \frac{(tX)^k}{k!}\right)}_{\text{Integralkurve}} - \frac{d}{ds} X(f) \left(\sum_k \frac{(sY)^k}{k!}\right)_{|t=s=0} \\
&= \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial s} (\exp tX) \cdot (\exp sY)\right)}_{\text{Ableitung nach Integralkurve}} (f) - \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial}{\partial t} (\exp sY) \cdot (\exp tX)\right) (f) \\
&= \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial s} \Big(\sum_k \frac{(tX)^k}{k!} \cdot \sum_j \frac{(sY)^j}{j!}\Big)_{|t=s=0} (f) \\
&\quad - \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial}{\partial t} \Big(\sum_j \frac{(sY)^j}{j!} \cdot \sum_k \frac{(tY)^k}{k!}\Big)_{|s=t=0} (f) \\
&= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial s} \big(tX \cdot sY - sY \cdot tX + o(s) + o(t)\big)\right) (f) \\
&= (X_e Y_e - Y_e X_e)(f)
\end{aligned}
$$

Also Lieklammer $[X,Y] = XY - YX$, für $X, Y \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^n) = \mathfrak{gl}(n)$).

Bemerkung. Ist G eine Liegruppe, dann ist TG trivial.

Satz 5.8. *Sei G Liegruppe. Dann erzeugt ein linksinvariantes Vektorfeld X einen* globalen Fluß $\varphi : G \times \mathbb{R} \to G$ *so:*

$$\tfrac{d}{dt} \varphi(g,t) = X\big(\varphi(g,t)\big),$$

d.h. $t \mapsto \varphi(g,t)$ ist Integralkurve von X. Es gilt

$$\varphi(g,t) = g \cdot \varphi(e,t).$$

Erhalte Liegruppenexponentialabbildung

$$
\begin{aligned}
\exp : \mathfrak{g} = T_e G &\to G \\
X &\mapsto \exp(X) = \varphi(e,1),
\end{aligned}
$$

wobei $\varphi \to \varphi(e,t)$ Integralkurve von X.

Beweis. Sei X ein linksinvariantes Vektorfeld, $c : (-\epsilon, \epsilon) \to G$ Integralkurve von X durch $c(0) = e$. Setze $c(\epsilon + s) := c(\epsilon) \cdot c(s)$ für $s \in (-\epsilon, \epsilon)$. Dies definiert wegen der Linksinvarianz eine Integralkurve von X auf $(-\epsilon, 2\epsilon)$. Also kann c auf ganz $\mathbb{R}$ definiert werden. Definiere $\varphi(g,t) := g \cdot c(t)$ auf $G \times \mathbb{R}$. Das ist ein globaler Fluß für X. Definiere die Exponentialabbildung exp durch $\exp := \varphi(e,1)$. Dann ist für $X \in \mathfrak{g} \cong T_e G$ die Abbildung $t \mapsto g \cdot \exp tX$ eine Integralkurve von X durch g. $\square$

Beispiel 5.9. Sei $X \in \Lambda^2(n)$ eine antisymmetrische Matrix, dann existiert ein $T \in \mathcal{SO}(n)$ so, daß gilt

$$A = TXT^{-1} \text{ ist von der Form } \begin{pmatrix} 0 & a_1 & & & \\ -a_1 & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & a_k \\ & & & -a_k & 0 \end{pmatrix} \quad (n = 2k).$$

$$\exp tA = \begin{pmatrix} \cos ta_1 & \sin ta_1 & & & \\ -\sin ta_1 & \cos ta_1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \cos ta_k & \sin ta_k \\ & & & -\sin ta_k & \cos ta_k \end{pmatrix}.$$

$$\exp tX = T^{-1} \exp AT.$$

Bemerkung. $S^n = \mathcal{SO}(n+1)/SO(n) =$ Orbit der Aktionen der $\mathcal{SO}(n)$ auf der $\mathcal{SO}(n+1)$. Man ist an der Menge aller Orbiten interessiert.

Definition 5.10. Eine Liegruppe G operiert auf einer Mannigfaltigkeit M als *Lie–Transformationsgruppe*, falls es einem Homomorphismus $\rho : G \to \text{Diffeo}(M)$ gibt, so daß die Abbildung

$$\begin{aligned} G \times M &\to M \\ (g, x) &\mapsto \rho(g)x \end{aligned}$$

differenzierbar ist.

Bemerkung. Die $\mathcal{SO}(n)$ operiert auf der $\mathcal{SO}(n+1)$ via $(g, h) \mapsto g \cdot h^{-1}$, d.h. für $h \in \mathcal{SO}(n)$ gilt: $\rho(h) = R_h$, wobei $R_h(g) = g \cdot h^{-1}$ die *Rechtstranslation* mit h ist.
Der Orbit ist $\{xg \mid x \in \mathcal{SO}(n+1), g \in \mathcal{SO}(n)\}$.

Beispiel 5.11. $T^2 = S^1 \times S^1$ Liegruppe, $\alpha \in (0,1)$ irrational. Definiere den Homomorphismus $\rho : \mathbb{R} \to \text{Diffeo}(T^2)$ via

$$(e^{i\theta}, e^{i\mu})t := (e^{i(\theta+t)}, e^{i(\mu+\alpha t)}).$$

Es gilt $\rho(t+s) = \rho(t) \cdot \rho(s)$ und $\rho(\mathbb{R}) \cdot (1,1)$ ist eine Untergruppe von T^2. Setze $A = \{e^{i\beta} \in S^1 \mid (1, e^{i\beta}) \in \rho(\mathbb{R}) \cdot (1,1)\}$, dann gilt $A = \{e^{i\alpha 2\pi k} \mid k \in \mathbb{Z}\}$. A ist Orbit der $1 = e^0$ von der Rotation R um den Winkel $2\pi\alpha$.
Behauptung: A ist eine unendliche Menge.
Beweis: Andernfalls gäbe es ein $j \neq k \in \mathbb{Z}$ mit $e^{i\alpha 2\pi j} = e^{i\alpha 2\pi k}$, d.h. $\alpha(j-k) \in \mathbb{Z}$, was nicht möglich ist, da α irrational.
Behauptung: A liegt dicht in S^1.
Beweis: Annahme, A liegt nicht dicht in S^1, dann gibt es ein nichtleeres Intervall $]a,b[\subset S^1 - A$. Nimm an, das Intervall $]a,b[$ besitzt maximale Länge unter allen solchen Intervallen. $R(]a,b[)$ ist ein Intervall derselben Länge, welches A nicht trifft. Also sind die $R^k(]a,b[)$ Intervalle, die entweder übereinstimmen

oder disjunkt sind, woraus folgt, daß von den Intervallen $R^k(]a,b[)$ nur endlich viele verschieden sind. Also existiert ein $k \neq j$ mit $R^k(]a,b[) = R^j(]a,b[)$, also $]a,b[= R^{k-j}(]a,b[)$ und somit $R^{k-j}(a) = a$ im Widerspruch zu unserer Annahme.
Also liegt die Untergruppe dicht im Torus T^2.

Satz 5.12. *Sei M eine Mannigfaltigkeit und G eine Liegruppe, die als Transformationsgruppe auf M operiert. Jedes $X \in \mathfrak{g}$ induziert ein Vektorfeld X^* auf M, und die Zuordnung $X \to X^*$ ist ein Liegruppenhomomorphismus (d.h. $[X^*,Y^*] = [X,Y]^*$). Wenn G frei operiert, dann ist $X^*(p) \neq 0$ für alle $p \in M$ und alle $X \neq 0$ aus $\mathfrak{g}$.*

Beweis. (Bemerkung $\frac{d}{dt}(g \cdot \exp tX)_{|t=0} = Xg$). Definiere $X^*(p) := \frac{d}{dt} p \cdot \exp tX$. Also: Wenn $\sigma_p(g) := p \cdot g$, dann ist $\sigma_p : G \to M$ eine differenzierbare Abbildung und $X^*(p) = \mathrm{D}\sigma_p(X)$. Ist $f : M \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion, dann ist $f \circ \sigma_p : G \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion und es gilt

$$X(f \circ \sigma_p)(g) = \mathrm{D}(f \circ \sigma_p)X(g) = X^*(f)\big(\sigma_p(g)\big),$$

ebenso gilt

$$[X,Y](f \circ \sigma_p)(g) = X\big(Y^*(f) \circ \sigma_p\big)(g) - Y\big(X^*(f) \circ \sigma_p\big)(g) = [X^*,Y^*](f)\big(\sigma_p(g)\big).$$

Wenn G frei operiert und $X^*(p) = 0$ für $p \in M, X \in G, X \neq 0$, dann ist die konstante Kurve Integralkurve von X^* durch p. Andererseits ist auch $t \mapsto p \cdot \exp tX$ Integralkurve, denn

$$p \cdot \exp(s+t)X = (p \cdot \exp sX)\exp tX.$$

Da G frei operiert (d.h. kein Punkt wird festgelassen), folgt, daß die Kurve nicht konstant sein kann also ein Widerspruch. $\square$

Korollar 5.13. *G operiere auf M als Transformationsgruppe. Auf dem Quotienten M/G existiert die Struktur einer Mannigfaltigkeit so, daß die kanonische Projektion $\pi : M \to M/G$ genau dann eine Submersion ist, wenn G eigentlich und frei operiert (d.h. für $K \subset M$ kompakt ist $\{g \in G \mid K \cap gK \neq \{0\}\}$ relativ kompakt, d.h. der Abschluß ist kompakt).*

Bemerkung. Beweis siehe z.B. Chevalley oder Sternberg

In Zukunft: G operiert *effektiv*, d.h. wenn $g \neq e$, dann existiert ein $p \in M$ mit $gp \neq p$.

Bemerkung: Wenn G auf M operiert, dann ist $K = \{g \in G \mid gp = p \text{ für alle } p \in M\}$ eine abgeschlossene normale Untergruppe von G. Wenn $k \in K, g \in G$, dann gilt

$$gkg^{-1}(p) = gk(g^{-1}p) = g(g^{-1}p) = p,$$

also K ist normal.

Satz 5.14. *Sei G eine Liegruppe und $H \subset G$ eine abgeschlossene Untergruppe. Dann ist $H \subset G$ eine Untermannigfaltigkeit und eine Liegruppe, die Liealgebra $\mathfrak{h}$ von H ist eine Unteralgebra von $\mathfrak{g}$, (d.h. $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ ist ein Unterraum, der abgeschlossssen unter der Lieklammer ist, d.h. $[\mathfrak{h},\mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$).*

Ohne Beweis.

Bemerkung. Sei K wie oben: $K \subset G$ ist Liegruppe, die eigentlich und frei auf G durch die Rechtstranslation $(g,h) \mapsto gh^{-1}$, $h \in K, g \in G$ operiert.
G/K ist Liegruppe, die effektiv auf M operiert. G/H heißt *homogener Raum*, G operiert auf G/H durch Linkstranslation via $g[g'H] = [gg'H]$.

Jetzt will man die Geometrie des Raumes betrachten: Man hat eine Riemannsche Metrik auf G/H. Man betrachtet zunächst den Fall: H ist die Identität.

Definition 5.15. Eine Riemannsche Mannigfaltigkeit auf G heißt *linksinvariant*, falls L_g eine Isometrie für jedes $g \in G$ ist.

Lemma 5.16. *Linksinvariante Metriken auf G stehen in 1-1 Beziehung zu Skalarprodukten $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf $\mathfrak{g}$.*

Beweis. Sind X, Y linksinvariante Vektorfelder und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ eine linksinvariante Metrik, dann gilt

$$\langle X(g), Y(g) \rangle = \langle \mathrm{D}L_g X(e), \mathrm{D}L_g Y(e) \rangle = \langle X(e), Y(e) \rangle .$$

□

Man kann jetzt auch Formen, Volumenformen, Tensoren, etc. über die Gruppe schieben. Dann ergibt sich folgendes Lemma:

Lemma 5.17. *Jede linksinvariante Metrik bestimmt eine linksinvariante* Volumenform ω, *d.h. ω ist eine n-Form auf G ($n = dim\ G$). $\omega(X_1 \wedge \ldots \wedge X_n) = 1$, falls $X_1, \ldots, X_n$ eine positiv orientierte Orthonormal-Basis von $T_e G$ ist. $L^* g\omega = \omega$ für alle $g \in G$.*

Bemerkung. Sei G eine Liegruppe und $H \subset G$ eine abgeschlossene Untergruppe, $\pi : G \to G/H$ die kanonische Projektion, $R_g(h) = hg$. Dann gilt $\mathrm{D}R_g(T_e G) = T_g G$. $\Phi_h : g \mapsto hgh^{-1}$ definiert einen Automorphismus von G, d.h. $\Phi(g \cdot g') = \Phi_h(g) \cdot \Phi_h(g')$. Φ_h ist ein innerer Automorphismus von G.

Satz 5.18. (i) *Das Differential in e von $\Phi_h, (h \in G)$ ist ein Automorphismus Ad_h von $\mathfrak{g}$, d.h. Ad_h ist eine lineare Isometrie von $\mathfrak{g}$ und $\mathrm{Ad}_h[X, Y] = [\mathrm{Ad}_h X, \mathrm{Ad}_h Y]$.*

(ii) *$h \mapsto \mathrm{Ad}_h$ ist eine Darstellung von G in $GL(\mathfrak{g})$, d.h. die Abbildung ist ein stetiger Homomophismus von G in $GL(\mathfrak{g})$*

Beweis. 1) Für $g \in G, h \in G$ haben wir

$$L_g \circ \Phi_h(z) = ghzh^{-1} = h(h^{-1}ghz)h^{-1} = \Phi_h \circ L_{h^{-1}gh}(z).$$

Also ist das Bild unter Φ_h eines linksinvarianten Vektorfeldes X auf G das linksinvariante Vektorfeld $\mathrm{Ad}_h(X)$.
2) Wegen $\Phi_h \circ \Phi_g = \Phi_{hg}$ folgt $\mathrm{Ad}_h \circ \mathrm{Ad}_g = \mathrm{Ad}_{hg}$. Weil Φ_h ein Diffeomorphismus ist, der ein linksinvariantes Vektorfeld X auf G auf das linksinvariante Vektorfeld $\mathrm{Ad}_h X$ abbildet, folgt $\mathrm{Ad}_h[X, Y] = [\mathrm{Ad}_h X, \mathrm{Ad}_h Y]$. □

Definition 5.19. Die Abbildung $\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ heißt die *adjungierte Darstellung* von G.

Satz 5.20. *Biinvariante Metriken auf der Gruppe entsprechen eindeutig Ad_G-invarianten Skalarprodukten auf G. Diese existieren genau dann, wenn der Abschluß von Ad_G in $GL(\mathfrak{g})$ kompakt ist. Insbesondere hat jede kompakte Gruppe eine biinvariante Metrik.*

Beweis. 1) Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ eine linksinvariante Metrik auf G. Für $h \in G$ erhalte eine neue linksinvariante Metrik $\langle \cdot, \cdot \rangle_h$ auf G durch

$$\langle X, Y \rangle_h = \langle \mathrm{D}\Phi_h X, \mathrm{D}\Phi_h Y \rangle .$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle_h$ ist linksinvariant, weil $\mathrm{D}\Phi_h$ linksinvariante Vektorfelder auf linksinvariante Vektorfelder abbildet. $\langle \cdot, \cdot \rangle_h$ ist durch $\langle X, Y \rangle_h = \langle \mathrm{Ad}_h X, \mathrm{Ad}_h Y \rangle$ gegeben. Also: Φ_h ist Isometrie für alle h genau dann, wenn

Ad_h das Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ erhält für alle h also wenn R_h Isometrie für alle h ist.
2) (Existenz) Wenn $\langle\cdot,\cdot\rangle$ biinvariant ist, dann ist $\mathrm{Ad}_h \in \mathcal{O}(\mathfrak{g},\langle\cdot,\cdot\rangle)$ für alle h und $\mathcal{O}(\mathfrak{g},\langle\cdot,\cdot\rangle)$ kompakt, also ist der Abschluß von Ad_G in $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ ist kompakt. Nimm an, daß Ad_G einen kompakten Abschluß H in $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ besitzt. $H \subset \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ ist abgeschlossene (also kompakte) Untergruppe von $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$. H ist kompakte Liegruppe, also existiert auf H eine rechtsinvariante Volumenform ω mit $\int_h \omega = 1$. Sei $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ein Skalarprodukt auf $\mathfrak{g}$. Definiere $\langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle$ durch

$$\langle\langle X,Y\rangle\rangle := \int_H \langle \Psi X, \Psi Y\rangle\,\omega(\Psi).$$

Dies ist ein Skalarprodukt, denn

(i) $\langle\langle X+X',Y\rangle\rangle = \int_H \langle \Psi X, \Psi Y\rangle + \langle \Psi X', \Psi Y\rangle\,\omega(\Psi)$.
ebenso in der 2. Stelle und Skalare, also bilinear

(ii) $\langle\langle X,X\rangle\rangle \;>\; 0\;\forall X > 0$, denn $\langle \Psi X, \Psi Y\rangle \;>\; 0\;\forall\;\Psi \in H$

(iii)

$$\begin{aligned}
\langle\langle \Psi X,\Psi Y\rangle\rangle &= \int_H \langle \Phi\Psi X, \Phi\Psi Y\rangle\,\omega(\Phi)\\
&= \int_H \langle \Phi R_\Psi X, \Phi R_\Psi Y\rangle\,\omega(\Phi)\\
&= \int_H \langle \Phi(\Psi X), \Phi(\Psi Y)\rangle\,\omega(\Phi\Psi)\\
&= \langle\langle X,Y\rangle\rangle
\end{aligned}$$

$\langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle$ ist invariant unter $H \supset \mathrm{Ad}_G$. □

Bemerkung. Ist $\varphi : G \to H$ ein differenzierbarer Gruppenhomomorphismus, dann ist $\mathrm{D}\varphi_e : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ ein Liealgebra–Homomorphismus, d.h.

$$\mathrm{D}\varphi_e[X,Y] = [\mathrm{D}\varphi_e X, \mathrm{D}\varphi_e Y].$$

Ist φ ein Homomorphismus, dann gilt $\varphi(gz) = \varphi \circ L_g(z) = \varphi(g) \circ \varphi(z)$.
Ist X linksinvariant auf G, dann ist $D\varphi X$ linksinvariant auf $\varphi(G) \subset H$. $\mathrm{D}\varphi(X)$ ist die Einschränkung linksinvarianter Vektorfelder in H auf $\varphi(G) \subset H$. Der Homomorphismus $g \mapsto \mathrm{Ad}_g$ von G in $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ ist auch differenzierbar. Das Differential ad von Ad in e ist eine Abbildung $\mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$. Sei G eine Untergruppe von $\mathrm{GL}(n)$, berechne $\mathrm{D}(h \to \mathrm{Ad}_h)(e)X, X \in \mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(n), \mathrm{Ad}_h = \mathrm{D}\Phi_h(e)$. Sei $Y \in \mathfrak{g}, t \to \exp tY$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
(\mathrm{ad}\,X)(Y) &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\mathrm{Ad}_{\exp tX}(Y)\right)_{|t=0}\\
&= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial s}\exp tX \cdot \exp sY \cdot \exp -tX\right)_{|t=s=0}\\
&= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial s}\sum_k \frac{(tX)^k}{k!}\sum_j \frac{(sY)^j}{j!}\sum_l \frac{(-tX)^l}{l!}\right)_{|t=s=0}\\
&= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial s}(\mathrm{Id}+tX+\ldots)\cdot(\mathrm{Id}+sY+\ldots)\cdot(\mathrm{Id}-tX+\ldots)\right)_{|t=s=0}\\
&= X\cdot Y - Y\cdot X\\
&= [X,Y].
\end{aligned}$$

Also $(\mathrm{ad}\,X)(Y) = [X,Y]$

Bemerkung. $\operatorname{ad} X$ ist ein Endomorphismus von $\mathfrak{g}$, d.h. ein Element von $\mathfrak{g}\ell(\mathfrak{g})$.

Korollar 5.21. (i) $\operatorname{Ad}_{\exp X} = \exp(\operatorname{ad} X)$ *(in $GL(\mathfrak{g})$).*

(ii) $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *ist genau dann* Ad_G*-invariant, wenn* $\operatorname{ad} X$ *antisymmetrisch bzgl.* $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *für alle* X*, d.h.* $\langle [X,Y], Z\rangle = \langle Z, [X,Y]\rangle$ *ist.*

Beweis. 1) Die Abbildung $t \to \exp tX$ ist ein Homomorphismus von $\mathbb{R}$ in G mit Tangente X in e, die Abbildung $t \to \operatorname{Ad}_{\exp tX}$ ist ein Homomorphismus von R in $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ mit Tangente $\mathrm{D}\operatorname{Ad}(X) = \operatorname{ad} X$, d.h. $\operatorname{Ad}_{\exp tX} = \exp(\operatorname{ad} tX)$.
2) Ad_h ist in $\mathcal{O}(\mathfrak{g}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ für alle $h \in G \Longrightarrow \mathrm{D}\operatorname{Ad} \subset$ Liealgebra von $\mathcal{O}(\mathfrak{g}, \langle\cdot,\cdot\rangle) =$ Algebra der antisymmetrischen Endomorphismen von $\mathcal{O}(\mathfrak{g}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$. Umgekehrt, wenn $\operatorname{ad} X$ antisymmetrisch für alle $X \in \mathfrak{g}$, dann ist $\operatorname{Ad}_{\exp X} \in \mathcal{O}(\mathfrak{g}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ für alle X. (exp ist lokaler Diffeomorphismus und läßt sich also auf die gesamte Liegruppe durch Linkstranslationen fortführen). $\square$