Prof. Dr. Ursula HAMENSTÄDT
Dr. Anna PRATOUSSEVITCH

Differentialgeometrie II
Sommersemester 2005

Blatt 3

Aufgabe 1 Zeigen Sie, daß ein eigentlicher vollständiger geodätischer metrischer Raum (X, d) genau dann ein Alexandrov-Raum nicht-negativer bzw. nicht-positiver Krümmung ist, wenn jeder Punkt $x \in X$ eine Umgebung U_x besitzt, so daß für jedes Dreieck $\Delta p_1 p_2 p_3$ in U_x, den Mittelpunkt s der Seite $p_2 p_3$, das Vergleichsdreieck $\tilde{\Delta} p_1 p_2 p_3 = \Delta \tilde{p}_1 \tilde{p}_2 \tilde{p}_3$ und den Mittelpunkt $\tilde{s}$ der Seite $\tilde{p}_2 \tilde{p}_3$ gilt

$$d(p_1, s) \geq |\tilde{p}_1 \tilde{s}| \quad \text{bzw.} \quad d(p_1, s) \leq |\tilde{p}_1 \tilde{s}|.$$

Aufgabe 2 Zeigen Sie, daß der metrische Raum (X, d) mit $X = \mathbb{R}^2$ und Metrik d, die von der Norm $||(x, y)|| = |x| + |y|$ induziert wird, weder ein Alexandrov-Raum nicht-negativer Krümmung noch ein Alexandrov-Raum nicht-positiver Krümmung ist.

Aufgabe 3 Es sei $B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine bilineare Abbildung.

1. Zeigen Sie, daß durch
$$\nabla_X Y = dY \cdot X + B(X, Y)$$
ein Zusammenhang ∇ auf dem Tangentialbündel des $\mathbb{R}^n$ definiert wird.

2. Zeigen Sie, daß für den Krümmungstensor R von ∇ gilt:
$$R(X, Y)Z = B(X, B(Y, Z)) - B(Y, B(X, Z)).$$

Aufgabe 4 $(*)$ Es sei (X, d) ein Längenraum. Es sei $\gamma : [0, T] \to X$ ein kürzester Weg. Es sei $p \neq \gamma(0)$ ein Punkt in X. Für jedes $t \in [0, T]$ sei $\ell(t) = d(p, \gamma(t))$ und sei σ_t ein kürzester Weg zwischen $\gamma(t)$ und p.

1. Hilfsaussage: Es sei Δabc ein Dreieck in $\mathbb{R}^2$, $\alpha = \angle bac$ und $t = |ac|$. Dann gilt
$$\left| \cos\alpha - \frac{|ab| - |bc|}{t} \right| \leq \frac{t}{|ab|}.$$

2. Ist der Winkel zwischen den kürzesten Wegen γ und σ_0 wohldefiniert und gleich α, so gilt
$$\limsup_{t \to +0} \frac{\ell(t) - \ell(0)}{t} \leq -\cos\alpha.$$

3. Es sei (X, d) ein Alexandrov-Raum nicht-negativer bzw. nicht-positiver Krümmung. Wir betrachten Folgen (σ_i) bzw. (τ_i) von kürzesten Wegen $[0, 1] \to X$ mit $\sigma_i(0) = \tau_i(0) = p_i$, die gleichmäßig gegen die kürzesten Wege σ bzw. τ mit $\sigma(0) = \tau(0) = p$ konvergieren. Zeigen Sie, daß gilt
$$\angle\sigma(1)p\tau(1) \leq \limsup_{i \to \infty} \angle\sigma_i(1)p_1\tau_i(1) \quad \text{bzw.} \quad \angle\sigma(1)p\tau(1) \geq \limsup_{i \to \infty} \angle\sigma_i(1)p_1\tau_i(1).$$

4. Es sei (X, d) ein Alexandrov-Raum nicht-negativer bzw. nicht-positiver Krümmung. Wir nehmen an, daß für eine Folge (t_i) mit $\lim_{i \to \infty} t_i = 0$ die Folge (σ_{t_i}) gegen σ_0 konvergiert. Dann existiert der Grenzwert
$$\lim_{t_i \to 0} \frac{\ell(t_i) - \ell(0)}{t_i} = -\cos\alpha,$$
wobei α der Winkel zwischen den kürzesten Wegen σ_0 und γ ist.