Prof. Dr. Ursula Hamenstädt
Dr. Anna Pratoussevitch

Differentialgeometrie II
Sommersemester 2005

Blatt 2

Es sei H die hyperbolische Ebene. Es sei $\partial H = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ und $\bar{H} = H \cup \partial H$.

Aufgabe 1 Es sei T die durch die Matrix $A \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ gegebene Isometrie von H. Es sei $\mathrm{tr}(A)$ die Spur der Matrix A. Zeigen Sie, daß gilt:

1. T ist elliptisch genau dann, wenn $|\operatorname{tr}(A)| < 2$ gilt.
2. T ist hyperbolischen genau dann, wenn $|\operatorname{tr}(A)| > 2$ gilt.
3. T ist parabolisch genau dann, wenn $|\operatorname{tr}(A)| = 2$ gilt.

Aufgabe 2 Zeigen Sie, daß Isometrien der hyperbolischen Ebene H wie folgt durch ihre Fixpunkte in $\bar{H}$ klassifiziert werden können:

1. Eine elliptische Isometrie hat in $\bar{H}$ genau einen Fixpunkt, und zwar in H.
2. Eine hyperbolischen Isometrie hat in $\bar{H}$ genau zwei Fixpunkte, und zwar in ∂H.
3. Eine parabolische Isometrie hat in $\bar{H}$ genau einen Fixpunkt, und zwar in ∂H.

Aufgabe 3 Es sei X ein Alexandrov-Raum nicht-positiver Krümmung. Eine parabolische Isometrie γ von X heißt *strikt parabolisch*, falls gilt $\inf_{x \in X} d_\gamma(x) = 0$, wobei $d_\gamma(x) = d(x, \gamma x)$. In dem Fall $\inf_{x \in X} d_\gamma(x) > 0$ heißt die parabolische Isometrie *gemischt parabolisch*.

1. Zeigen Sie, daß jede parabolische Isometrie von H strikt parabolisch ist.
2. Geben Sie ein Beispiel einer gemischt parabolischen Isometrie an.

Aufgabe 4 Es sei X ein Alexandrov-Raum nicht-positiver Krümmung. Es sei $c : \mathbb{R} \to X$ eine Geodätische. Die *Busemann-Funktion* $h_c : X \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$h_c(x) = \lim_{t \to \infty} (d(x, c(t)) - d(c(0), c(t)).$$

Eine *Horosphäre* ist das Niveau $h_c^{-1}(\alpha)$ und ein *Horoball* ein Unterniveau $h_c^{-1}((-\infty, \alpha))$ einer Busemann-Funktion.

1. Zeigen Sie, daß der Grenzwert in der Definition der Busemann-Funktion existiert.
2. Zeigen Sie, daß eine parabolische Isometrie Horosphären in Horosphären abbildet.
3. Zeigen Sie, daß die Horosphären in der hyperbolischen Ebene genau die Euklidischen Kreislinien in $\bar{H}$ sind, die tangential sind zu $\mathbb{R}$, sowie die horizontalen Geraden.
4. Es sei T eine Isometrie der hyperbolischen Ebene, die einen Punkt $\xi \in \partial H$ als Fixpunkt hat. Zeigen Sie, daß T genau dann parabolisch ist, wenn für jede Horosphäre S durch den Punkt ξ gilt $T(S) = S$.