Prof. Dr. Ursula Hamenstädt
Dr. Anna Pratoussevitch

Differentialgeometrie II
Sommersemester 2005

Blatt 10

Aufgabe 1 (Totalgeodätische Untermannigfaltigkeiten)

Erinnerung: Eine Untermannigfaltigkeit N einer Riemannschen Mannigfaltigkeit M heißt *totalgeodätisch*, falls jede Geodätische γ in M mit $\gamma(0) \in N$ und $\dot\gamma(0) \in T_{\gamma(0)}N$ ganz in N verläuft.

1. Es sei $f : M \to M$ eine Isometrie. Beweisen Sie, daß die Zusammehangskomponenten der Fixpunktmenge von f totalgeodätische Untermannigfaltigkeiten von M sind.

2. Bestimmen Sie alle zusammenhängenden totalgeodätischen Untermannigfaltigkeiten in $\mathbb{R}^n$ und S^n.

Aufgabe 2 (Jacobische Differentialgleichung auf Liegruppen)

Es sei G eine Liegruppe mit biinvarianter Metrik.

1. Es sei e das Eins-Element von G und γ eine Geodätische in G mit $\gamma(0) = e$. Es sei $E_i(t)$ eine Orthonormalbasis paralleler Vektorfelder längs $\gamma(t)$ mit $E_1(t) = \dot\gamma(t)$. Zeigen Sie, daß die Jacobische Differentialgleichung bezüglich dieser Basis zu einer linearen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten wird.

2. Beweisen Sie, daß der Index eines zu e konjugierten Punktes g in G stets gerade ist.

Aufgabe 3 (Killingform)

1. Zeigen Sie, daß die Liealgebra $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ der Liegruppe $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ mit der Lielgebra der reellen $(n \times n)$-Matrizen X mit $\operatorname{tr} X = 0$ identifiziert werden kann.

2. Berechnen Sie die Killingform von $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$.

Aufgabe 4 (Ricci-Tensor für Liegruppen)

Berechnen Sie den Ricci-Tensor für eine Liegruppe mit biinvarianter Metrik aus der Lieklammer. [Hinweis: Vergleichen Sie den Ricci-Tensor mit der Killingform.]

Aufgabe 5 (Fundamentalgruppen von Liegruppen)

Beweisen Sie, daß die Fundamentalgruppe einer Liegruppe stets abelsch ist.