Prof. Dr. Ursula Hamenstädt
Dr. Anna Pratoussevitch

Differentialgeometrie II
Sommersemester 2005

Blatt 1

Aufgabe 1 Zeigen Sie die folgende Formel für die Fläche F eines Dreiecks Δ in der hyperbolischen Ebene mit Winkeln α, β und γ

$$F = \pi - (\alpha + \beta + \gamma).$$

[Hinweis: Zeigen Sie die Formel zuerst in dem folgenden Spezialfall: Eine Ecke des Dreiecks Δ ist ∞, die beiden anderen liegen am Kreis vom Radius 1 um den Punkt 0.]

Erinnerung+Notation: Es sei (X, d) ein eigentlicher vollständiger geodätischer metrischer Raum. Für ein Dreieck $\Delta p_1p_2p_3$ in X mit Ecken p_1, p_2 und p_3 sei $\tilde{\Delta}p_1p_2p_3$ ein *Vergleichsdreieck* in der (Euklidischen) Ebene, das heißt ein Dreieck mit Ecken $\tilde{p}_1, \tilde{p}_2$ und $\tilde{p}_3$ für das gilt $|\tilde{p}_i\tilde{p}_j| = d(p_i, p_j)$ für alle i und j. Es sei ferner $\tilde{\angle}p_1p_2p_3$ der Winkel des Vergleichsdreiecks $\tilde{\Delta}p_1p_2p_3$ in der Ecke $\tilde{p}_2$. Der metrische Raum (X, d) ist ein *Alexandrov-Raum nicht-negativer Krümmung*, falls jeder Punkt $x \in X$ eine Umgebung U_x besitzt, so daß für jedes Dreieck $\Delta p_1p_2p_3$ in U_x, jeden Punkt s auf der Seite p_2p_3 des Dreiecks, das Vergleichsdreieck $\tilde{\Delta}p_1p_2p_3 = \Delta\tilde{p}_1\tilde{p}_2\tilde{p}_3$ und Punkt $\tilde{s}$ auf der Seite $\tilde{p}_2\tilde{p}_3$ des Vergleichsdreiecks mit $|\tilde{p}_i\tilde{s}| = d(p_i, s)$ für $i = 2, 3$ gilt $d(p_1, s) \geq |\tilde{p}_1\tilde{s}|$.

Aufgabe 2 Es seien $X_1, \ldots, X_n$ Alexandrov-Räume nicht-negativer Krümmung. Zeigen Sie, daß das Produkt $X_1 \times \cdots \times X_n$ mit der durch den Satz des Pythagoras gegebenen Metrik wieder ein Alexandrov-Raum nicht-negativer Krümmung ist.

Aufgabe 3 Es sei $(X_i)_{i \in I}$ eine Zerlegung des Raums X in disjunkte abgeschlossene äquidistante Teilmengen. (Die Teilmengen Y und Z sind äquidistant, falls die Abstände $d(y, Z)$ und $d(z, Y)$ nicht von der Wahlen von $y \in Y$ und $z \in Z$ abhängen.) Durch

$$d_I(X_i, X_j) := \inf\{d(x_i, x_j) \mid x_i \in X_i, x_j \in X_j\}$$

ist eine Metrik auf I gegeben. Zeigen Sie, daß der metrische Raum (I, d_I) ein Alexandrov-Raum nicht-negativer Krümmung ist, falls der Raum (X, d) diese Eigenschaft hat.

Bemerkung: Aus der Aufgabe 3 folgt insbesondere: Es sei (X, d) ein Alexandrov-Raum nicht-negativer Krümmung, Γ eine eine Gruppe von Isometrien von X, dann ist der Quotientenraum $\overline{X/\Gamma}$ auch ein Alexandrov-Raum nicht-negativer Krümmung. (Die Punkte von $\overline{X/\Gamma}$ sind die Abschlüsse der Orbits von Γ).

Aufgabe 4 Zeigen Sie, daß der metrische Raum (X, d) genau dann ein Alexandrov-Raum nicht-negativer Krümmung ist, wenn jeder Punkt x in X eine Umgebung U_x hat, so daß für je vier (verschiedene) Punkte p_1, p_2, p_3 und p_4 in U_x gilt

$$\tilde{\angle}p_2p_1p_3 + \tilde{\angle}p_2p_1p_4 + \tilde{\angle}p_3p_1p_4 \leq 2\pi.$$