Prof. Dr. Ursula Hamenstädt
Dr. Anna Pratoussevitch

Blatt 9

Aufgabe 1 (Satz von Gauß-Bonnet für Flächen mit Rand) Es sei M eine kompakte orientierte Fläche vom Geschlecht g. Es sei γ eine geschlossene Kurve auf M, so daß $M\backslash\{\mathrm{im}(\gamma)\}$ aus zwei Komponenten M_1 und M_2 besteht. Wir nehmen an, daß eine der Komponenten, zum Beispiel M_1, zu einem Disk homöomorph ist. Es sei $F = M\backslash M_1$. Wir nennen F eine orientierte Fläche mit Rand vom Geschlecht g mit einer Randkomponente.

1. Beweisen Sie die folgende Verallgemeinerung des Satzes von Gauß-Bonnet auf Flächen mit Rand: Es sei F eine orientierte Fläche mit Rand vom Geschlecht g mit einer Randkomponente mit einer vollständigen Riemannschen Metrik, so daß die Randkurve eine geschlossene Geodätische ist. Dann gilt

$$\int_F K d\,\mathrm{vol} = 2\pi(1-2g).$$

2. Überlegen Sie, wie orientierte Flächen mit Rand mit mehreren Randkomponenten zu definieren sind, formulieren Sie den Satz von Gauß-Bonnet für eine orientierte Fläche mit Rand vom Geschlecht g mit m Randkomponenten und beweisen Sie diesen Satz.

Aufgabe 2 (Eulercharakteristik) Es sei P eines der folgenden regulären Polyeder: Tetraeder, Würfel, Oktaeder, Dodekaeder, Ikosaeder. Es sei Q das 1-Skelett von P, das heißt Q besteht aus den Ecken und Kanten von P. Es sei U die ε-Umgebung von Q für ein genügend kleines $\varepsilon > 0$. Der Rand $F = \partial U$ ist eine kompakte Fläche in $\mathbb{R}^3$. Geben Sie eine Triangulierung von F an und bestimmen Sie die Eulercharakteristik von F.

Aufgabe 3 (Hyperbolische Dreiecksgruppen) Es sei Δ ein hyperbolisches Dreieck mit Ecken π/p_1, π/p_2 und π/p_3. (Unter welchen Bedingungen an die natürlichen Zahlen p_1, p_2 und p_3 existiert ein solches Dreieck?) Für $k = 1, 2, 3$ sei s_k die hyperbolische Spiegelung an der Seite des Dreiecks, die der Ecke mit dem Winkel π/p_k gegenüber liegt. Es sei Γ die von den Spiegelungen s_1, s_2 und s_3 erzeugte Gruppe.

1. Beweisen Sie, daß für $k = 1, 2, 3$ gilt

$$(s_{k-1} \circ s_{k+1})^{p_k} = \mathrm{id},$$

wobei die Indizes zyklisch zu verstehen sind, das heißt $s_4 = s_1$ usw.

2. Zeigen Sie, daß das Dreieck Δ ein Fundamentalbereich für die Wirkung der Gruppe Γ auf der hyperbolischen Ebene H ist, das heißt:
   (a) Jeder Punkt von H liegt in $g(\Delta)$ für ein $g \in \Gamma$.
   (b) Liegt ein Punkt p von H sowohl in Δ als auch in $g(\Delta)$ für ein $g \in \Gamma\backslash\{\mathrm{id}\}$, so ist p ein Randpunkt von Δ und $g(\Delta)$.

Aufgabe 4 (Komplex-projektive Ebene) Die natürliche glatte Abbildung $\pi : S^5 \to \mathbb{C}P^2$ der Einheitssphäre $S^5 \subset \mathbb{C}^3$ auf den projektiven Raum $\mathbb{C}P^2$ heißt *Hopf-Faserung*. Die Fasern $\pi^{-1}(\pi(P))$ für $P \in S^5$ heissen *Hopfkreise*.

1. Beweisen Sie, daß

$$\pi^{-1}(\pi(p)) = S^5 \cap [P] = \{e^{it} \cdot P \mid t \in [0, 2\pi]\}$$

   für jedes $P \in S^5$ gilt, wobei $[P]$ die von P aufgespannte komplexe Gerade ist.

2. Für $P \in S^5$ sei U_P ein orthogonales Komplement von $i \cdot P$ in $T_P S^5$, das heißt $T_P S^5 = \langle i \cdot P \rangle \oplus U_P$. Beweisen Sie, daß es eine eindeutig bestimmte Riemannsche Metrik auf $\mathbb{C}P^2$ gibt, so daß die Abbildung $d\pi|_{U_P} : U_P \to T_{\pi(P)}\mathbb{C}P^2$ für jedes $P \in S^5$ eine Isometrie ist.

3. Es sei K ein Großkreis auf S^5, der Hopfkreise senkrecht schneidet. Zeigen Sie, daß K eine Parametrisierung der Form $\gamma(t) = \cos t \cdot P + \sin t \cdot V$ für ein $P \in S^5$ und $V \in \mathbb{C}^3$ mit $V \perp P, iP$ hat. Beweisen Sie, daß $\pi \circ \gamma$ eine Geodätische in $\mathbb{C}P^2$ ist.

4. Beweisen Sie, daß es zwischen je zwei Punkten $P, Q \in \mathbb{C}P^2$ mit Abstand $d(P, Q) < \pi/2$ eine eindeutig bestimmte kürzeste Geodätische gibt.