Prof. Dr. Ursula Hamenstädt
Dr. Anna Pratoussevitch

Blatt 8

Aufgabe 1 (Poincaré-Modell der hyperbolischen Ebene) Die obere Halbebene

$$H = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) > 0\}$$

mit der Riemannschen Metrik

$$g_z(v,v) = \frac{|v|^2}{(\operatorname{Im}(z))^2}$$

ist ein Modell der hyperbolischen Ebene. In dieser Aufgabe befassen wir uns mit einem anderen Modell, dem Poincaré-Modell. Es sei $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ die Kreisscheibe in $\mathbb{C}$. Die durch

$$f(z) = \frac{zi+1}{z+i}$$

gegebene Bijektion $f : H \to D$ induziert eine Riemannsche Metrik g^* auf D.

1. Beweisen Sie die folgende Hilfsaussage
$$\frac{2|f'(z)|}{1-|f(z)|^2} = \frac{1}{\operatorname{Im}(z)}.$$
2. Geben Sie eine explizite Formel für die induzierte Riemannsche Metrik g^* an.
3. Beweisen Sie, daß die Geodätischen in (D, g^*) die Bögen der zum Rand ∂D von D orthogonalen Euklidischen Kreise sowie Diameter von ∂D sind.
4. Es seien komplexe Zahlen a und b mit $|a|^2 - |b|^2 = 1$ gegeben. Zeigen Sie, daß die gebrochen-lineare Transformation
$$z \mapsto \frac{az+\bar{b}}{bz+\bar{a}}$$
eine Isometrie von (D, g^*) ist.
5. Bestimmen Sie die Gruppe der orientierungerhaltenden Isometrien von (D, g^*). Mit welcher Matrixgruppe kann man sie identifizieren?

Aufgabe 2 (Hyperbolische Spiegelungen) Die *hyperbolische Spiegelung* in einer Geodätischen γ in der hyperbolischen Ebene ist die (eindeutig bestimmte) Isometrie, die das Bild der Geodätishen γ punktweise festhält (und nicht die Identität ist).

1. Es sei H die obere Halbebene als Modell der hyperbolischen Ebene wie in der Aufgabe 1. Wir betrachten die Geodätische γ mit $\operatorname{Im}(\gamma) = \{z \in H \mid \operatorname{Re}(z) = 0\}$. Geben Sie eine explizite Formel für die hyperbolische Spiegelung in γ. Beweisen Sie, daß die hyperbolische Spiegelung in γ eindeutig bestimmt ist.
2. Es sei D die Kreisscheibe als Poincaré-Modell der hyperbolischen Ebene wie in der Aufgabe 1. Wir betrachten die Geodätische γ mit $\operatorname{Im}(\gamma) = \{z \in D \mid \operatorname{Re}(z) = 0\}$. Geben Sie eine explizite Formel für die hyperbolische Spiegelung in γ.
3. Beweisen Sie, daß für jede Geodätische γ eine eindeutig bestimmte hyperbolische Spiegelung in γ existiert. [Hinweis: Benutzen Sie Teil 1 oder 2 dieser Aufgabe und die Transitivität der Isometriegruppe.]
4. Wir betrachten die obere Halbebene H als Modell der hyperbolischen Ebene. Das Bild der Geodätischen γ sei gegeben durch $\{z \in H \mid |z - z_0| = r\}$ mit $z_0 \in \mathbb{R}$ und $r > 0$. Geben Sie eine explizite Formel für die hyperbolische Spiegelung in γ an.

Aufgabe 3 (Nicht-orientierbare Flächen) Beweisen Sie, daß

$$T^2 \# \mathbb{R}P^2 \cong \mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2$$

gilt, wobei T^2 der 2-dimensionale Torus, $\mathbb{R}P^2$ die reell-projektive Ebene und $\#$ die zusammenhängende Summe ist. [Hinweis: Beide Räume kann man durch Identifikation der Kanten eines 6-Ecks erhalten.]

Aufgabe 4 (Schnittort für Flächen) Es sei P ein reguläres hyperbolisches Achteck mit Innenwinkel $\pi/4$. Es sei F die Fläche mit Riemannscher Metrik konstanter Krümmung -1, die durch Identifikation der gegenüberliegenden Kanten von P entsteht. Es sei p der Punkt von F, der dem Mittelpunkt von P entspricht.

1. Beschreiben Sie den Schnittort von F bezüglich p.
2. Bestimmen Sie den Injektivitätsradius von F.