Prof. Dr. Ursula HAMENSTÄDT
Dr. Anna PRATOUSSEVITCH

Blatt 7

Aufgabe 1 (Satz von Synge-Weinstein)

1. Zeigen Sie das folgende Lemma: Es sei $A : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^{n-1}$ eine orthogonale lineare Abbildung mit $\det(A) = (-1)^n$. Dann gilt: Die Abbildung A hat einen Fixpunkt, das heißt es gibt einen Vektor $v \in \mathbb{R}^{n-1}$ mi $Av = v$.

2. Es sei (M, g) eine n-dimensionale orientierte kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit und f eine Isometrie von M ohne Fixpunkte, das heißt $f(q) \neq q$ für alle $q \in M$. Es sei p der Punkt in M, für den gilt
$$d(p, f(p)) = \min\{d(q, f(q)) \bigm| q \in M\}.$$
Es sei $\gamma : [0, \ell] \to M$ die nach der Bogenlänge parametrisierte minimierende Geodätische von $\gamma(0) = p$ nach $\gamma(\ell) = f(p)$. Zeigen Sie, daß $(f \circ \gamma)'(0) = \gamma'(\ell)$ gilt.

3. Es sei (M, g) eine n-dimensionale orientierte kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit und f eine Isometrie von M ohne Fixpunkte. Es sei $p \in M$ der Punkt mit $d(p, f(p)) = \min\{d(q, f(q)) \bigm| q \in M\}$. Es sei $\gamma : [0, \ell] \to M$ die nach der Bogenlänge parametrisierte minimierende Geodätische von $\gamma(0) = p$ nach $\gamma(\ell) = f(p)$. Es sei $P : T_{f(p)}M \to T_pM$ die Parallelverschiebung längs γ. Es sei $\tilde{A} = P \circ (Df)_p : T_pM \to T_pM$ und A die Einschränkung von $\tilde{A}$ auf das orthogonale Komplement von $\gamma'(0)$. Konstruieren Sie ein paralleles Einheitsvektorfeld E längs γ, das orthogonal zum Geschwindigkeitsvektorfeld von γ ist, so daß $E(0)$ invariant unter A ist. [Hinweis: Wenden Sie das Lemma aus dem ersten Teil dieser Aufgabe an.]

4. Beweisen Sie den folgenden Satz von Weinstein: Es sei (M, g) eine n-dimensionale orientierte kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit mit positiver Schnittkrümmung.
   (a) Es sei n gerade. Dann gilt: Jede orientierungserhaltende Isometrie von M hat einen Fixpunkt.
   (b) Es sei n ungerade. Dann gilt: Jede orientierungsumkehrende Isometrie von M hat einen Fixpunkt.

   [Hinweis: Konstruieren Sie mit Hilfe des Vektorfeldes E aus dem dritten Teil dieser Aufgabe eine geignete Variation mit fallendem Abstand $d(q, f(q))$ im Widerspruch zur Wahl von p. Benutzen Sie die Formel der zweiten Variation der Energie.]

5. Folgern Sie aus dem Satz von Weinstein den Satz von Synge: Es sei (M, g) eine n-dimensionale kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit mit positiver Schnittkrümmung.
   (a) Ist M orientierbar und n gerade, so ist M einfach zusammenhängend.
   (b) Ist n ungerade, so ist M orientierbar.

Aufgabe 2 (Wir basteln einen Torus) Für welche n kann man die Kanten eines regulären euklidischen n-Ecks so identifizieren, daß ein Torus mit euklidischer Metrik entsteht?

Aufgabe 3 (Das reguläre hyperbolische 14-Eck) Es sei P ein reguläres hyperbolisches 14-Eck mit Innenwinkel $2\pi/7$. Finden Sie eine Identifizierung der Kanten von P, so daß eine orientierte kompakte Fläche vom Geschlecht 3 (mit glatter hyperbolischer Metrik) entsteht.

Aufgabe 4 (Zwei reguläre hyperbolische 6-Ecke) Es seien P_1 und P_2 zwei reguläre hyperbolische 6-Ecke mit Innenwinkel $\pi/3$. Die Kanten von P_1 und P_2 seien numeriert von 1 bis 6 im Uhrzeigersinn. Es sei F die Fläche, die entsteht, wenn wir für $k = 1, \ldots, 6$ die k-te Kante von P_1 mit der k-ten Kante von P_2 identifizieren, ohne die Orientierung zu ändern. [Identifiziert man die Kanten mit Orientierungsänderung, so entsteht eine Sphäre (mit Ecken).]

1. Zeigen Sie, daß F eine kompakte geschlossene Fläche vom Geschlecht 2 (mit glatter hyperbolischer Metrik) ist.
2. Zerlegen Sie die Fläche F in 4 reguläre 6-Ecke mit Innenwinkel $\pi/2$.
3. Zerlegen Sie die Fläche F in 6 reguläre 4-Ecke mit Innenwinkel $\pi/3$.