Prof. Dr. Ursula Hamenstädt
Dr. Anna Pratoussevitch



# Blatt 6

**Aufgabe 1 (Das erste Index-Lemma)** Es sei $(M, g)$ eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, $p, q \in M$ und $\gamma$ eine Geodätische von $p$ nach $q$, die keine zu $p$ konjugierten Punkte enthält. Es sei $W$ ein stückweise glattes Vektorfeld längs $\gamma$ mit $W(p) = 0$ und $V$ das eindeutig bestimmte Jacobifeld längs $\gamma$ mit $V(p) = W(p) = 0$ und $V(q) = W(q)$. Dann gilt $I(W, W) \geq I(V, V)$ mit Gleichheit genau dann, wenn $V = W$.

**Aufgabe 2 (Stetigkeit der Indexform)** Es sei $(M, g)$ eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und $\gamma : [0, 1] \to M$ eine Geodätische. Für $\varepsilon \in (0, 1)$ sei $\tilde{I}_\varepsilon$ die Indexform auf dem Vektorraum $\mathcal{V}_\varepsilon$ der stückweise glatten Vektorfelder längs $\gamma|_{[0,1-\varepsilon]}$, die in $\gamma(0)$ und $\gamma(1 - \varepsilon)$ verschwinden, $\varphi_\varepsilon : [0, 1] \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion mit $\varphi|_{[0,1-2\varepsilon]} \equiv 1$ und $\varphi|_{[1-2\varepsilon,1-\varepsilon]} \equiv 0$ und $I_\varepsilon$ eine Form auf $\mathcal{V} = \mathcal{V}_0$, die durch

$$I_\varepsilon(X, Y) = \tilde{I}_\varepsilon(X \cdot \varphi_\varepsilon|_{[0,1-\varepsilon]}, Y \cdot \varphi_\varepsilon|_{[0,1-\varepsilon]})$$

definiert ist. Beweisen Sie, daß gilt

$$\lim_{\varepsilon \to 0} I_\varepsilon(X, Y) = I(X, Y).$$

**Aufgabe 3 (Die Hessesche der Abstandsfunktion)** Es sei $(M, g)$ eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit innerer Metrik. Für einen Punkt $p \in M$ betrachten wir die Abstandsfunktion $d_p : M \to \mathbb{R}$, gegeben durch $d_p(x) = d(p, x)$. Beweisen Sie, daß gilt

1. Es gibt ein $\varepsilon > 0$, so daß $d_p$ auf $U = \{x \in M \mid d_p(x) \in (0, \varepsilon)\}$ glatt ist.
2. In $U$ gilt $|\operatorname{grad} d_p| = 1$.
3. Es sei $\gamma$ eine Geodätische in $M$ mit $\gamma(0) = p$, $|\dot{\gamma}(t)| = 1$ und $Y$ ein orthogonales Jacobifeld längs $\gamma$ mit $J(0) = 0$. Dann gilt

$$I(Y, Y) = \operatorname{Hess} d_p(Y(t), Y(t)).$$

[Erinnerung: $\langle \operatorname{grad} f, X\rangle = d_X f$, $\operatorname{Hess} f(X, Y) = \langle \nabla_X \operatorname{grad} f, Y\rangle$.]

**Aufgabe 4 (Injektivität der Exponentialabbildung)** Zeigen Sie, daß es auf dem Rotationshyperboloid

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = -1,\ z > 0\}$$

einen Punkt gibt, auf dessen Tangentialraum die Exponentialabbildung nicht injektiv ist.