Prof. Dr. Ursula Hamenstädt
Dr. Anna Pratoussevitch

Blatt 5

Aufgabe 1 (Jacobifelder auf Drehflächen) Wir betrachten die durch

$$f(u,v) = (r(u)\cos v, r(u)\sin v, h(u))$$

gegebene Drehfläche, wobei $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ Funktionen mit $(h')^2 + (r')^2 \equiv 1$ sind.

1. Zeigen Sie, daß für jedes v die Meridiankurve $c_v(u) = f(u,v)$ eine Geodätische ist.
2. Zeigen Sie, daß das Vektorfeld $Y(u) = \frac{\partial}{\partial v} f(u,v)$ ein Jacobifeld längs c_v ist.
3. Benutzen Sie die Jacobi-Gleichung für Y, um die Krümmung der Drehfläche auszurechnen.

Aufgabe 2 (Killingfelder) Es sei M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und $\Phi : \mathbb{R}\times M \to M$ ein Fluß von Diffeomorphismen, das heißt Φ ist glatt und die Abbildungen $\Phi_t : M \to M$ gegeben durch $\Phi_t(p) = \Phi(t,p)$ erfüllen die Gleichung $\Phi_s \circ \Phi_t = \Phi_{s+t}$ für alle $s,t \in \mathbb{R}$. Das Vektorfeld $X = \frac{\partial}{\partial t}\Phi|_{t=0}$ ist das dem Fluß Φ assoziierte Vektorfeld.

1. Beweisen Sie, daß Φ genau dann ein Fluß von Isometrien ist, wenn das Tensorfeld ∇X schiefsymmetrisch ist, das heißt wenn gilt

   $$\langle \nabla_Y X, Z\rangle = -\langle \nabla_Z X, Y\rangle$$

   für alle Vektorfelder Y und Z. Das Vektorfeld X heißt in diesem Fall *Killing(vektor)feld.*
2. Geben Sie ein Killingfeld auf Drehflächen an.
3. Es sei $c : I \to M$ eine Geodätische und X ein Killingfeld auf M. Zeigen Sie, daß das Skalarprodukt $\langle X \circ c, \dot c\rangle$ konstant ist.
4. Benutzen Sie die Killingfelder, um den folgenden Satz von Clairaut zu beweisen: Es sei F eine durch $f(u,v) = (r(u)\cos v, r(u)\sin v, u)$ parametrisierte Drehfläche. Es sei $c(t) = f(u(t), v(t))$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve $c : I \to F$ und $\psi(t)$ der Winkel zwischen $\dot c(t)$ und dem Breitenkreis $v \mapsto f(u(t), v)$. Dann gilt: Ist c eine Geodätische, so gilt

   $$r(u(t)) \cdot \cos\psi(t) \equiv \text{const}\,.$$

   Umgekehrt, ist diese Gleichung erfüllt und gilt zusätzlich $\dot u(t) \neq 0$ für alle $t \in I$, so ist c eine Geodätische.
5. Es sei $c : I \to M$ eine Geodätische und X ein Killingfeld auf M. Zeigen Sie, daß dann gilt

   $$R(X \circ c, \dot c)\dot c = -\nabla_{\dot c}\nabla_{\dot c} X.$$

   Benutzen Sie diese Gleichung, um die Krümmung der Drehflächen auszurechnen.

Aufgabe 3 (Jacobifelder auf Flächen) Es sei F eine Fläche, also eine 2-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit. Es sei $c : I \to F$ eine Geodätische und P ein Vektorfeld längs c, so daß $P(t)$ für jedes $t \in I$ ein zu $\dot{c}(t)$ orthogonaler Einheitsvektor ist.

1. Zeigen Sie, daß das Vektorfeld P parallel längs c ist.
2. Es sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion. Beweisen Sie, daß das Vektorfeld $f \cdot P$ genau dann ein orthogonales Jacobifeld längs c ist, wenn gilt $K \cdot f + \ddot{f} = 0$, wobei K die Gaußkrümmung von F (längs c) ist.

Aufgabe 4 (konstante Schnittkrümmung) Zeigen Sie, daß für den Krümmungstensor R einer Riemannschen Mannigfaltigkeit mit konstanter Schnittkrümmung κ gilt

$$R(X,Y)Z = \kappa \cdot (\langle Z,Y \rangle \cdot X - \langle X,Y \rangle \cdot Z).$$