Prof. Dr. Ursula HAMENSTÄDT
Dr. Anna PRATOUSSEVITCH

Differentialgeometrie II
Sommersemester 2005

Blatt 4

Aufgabe 1 Es sei U eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ und $f : U \to \mathbb{R}^3$ eine Immersion. Auf U wird durch die Einbettung f eine Metrik I induziert. Die Metrik I wird als die *erste Fundamentalform* bezeichnet. Sie ist gegeben durch

$$I_p(X,Y) = \langle (df)_p(X), (df)_p(Y) \rangle$$

für $X, Y \in T_pU$, wobei $(df)_p : T_pU \to T_{f(p)}\mathbb{R}^3$ das Differenzial von f im Punkte p und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$ ist. Die *Gaußabbildung* bzw. die *Normale* $n : U \to \mathbb{R}^3$ von f ist gegeben durch

$$n(p) = \frac{N(p)}{||N(p)||} \quad \text{mit} \quad N(p) = (df)_p(e_1) \times (df)_p(e_2),$$

wobei $\times$ das Kreuz-Produkt in $\mathbb{R}^3$ und (e_1, e_2) die Standardbasis von $T_pU = T_p\mathbb{R}^2$ ist. Die *zweite Fundamentalform* von f ist geben durch

$$II_p(X,Y) = -\langle (df)_p(Y), (dn)_p(X) \rangle.$$

Die reellen (2×2)-Matrizen $g(p)$ und $h(p)$ für $p \in U$ seien definiert durch

$$g_{ij}(p) = I_p(e_i, e_j) \quad \text{und} \quad h_{ij}(p) = II_p(e_i, e_j).$$

1. Beweisen Sie, daß gilt

$$h_{ij}(p) = -\left\langle \frac{\partial f}{\partial u_i}(p), \frac{\partial n}{\partial u_j}(p) \right\rangle = \left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial u_i \partial u_j}(p), n(p) \right\rangle.$$

2. Es sei $K(p)$ die Gaußkrümmung im Punkte $p \in U$. Beweisen Sie, daß gilt

$$K(p) = \frac{\det g(p)}{\det h(p)}.$$

[Hinweis: Zeigen Sie die Formel zuerst für den Fall, daß die Matrizen g und h diagonal sind.]

Aufgabe 2 Es sei $f : U \to \mathbb{R}^3$ wie in der Aufgabe 1. Es sei $K(p)$ die Gaußkrümmung im Punkte $p \in U$.

1. Zeigen Sie, daß für $p \in U$ gilt:
   (a) Falls $K(p) > 0$, so gibt es eine Umgebung V von p, so daß die Punkte $f(v)$ für $v \in V$ auf einer Seite der Tangentialebene in p liegen.
   (b) Falls $K(p) < 0$, so gibt es keine solche Umgebung V von p. In jeder Umgebung V von p gibt es einen Punkt $q \neq p$, so daß der Punkt $f(q)$ in der Tangentialebene in p liegt.
   (c) Was kann man für den Fall $K(p) = 0$ sagen?
2. Wir nehmen an, daß das Bild von f eine kompakte Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$ ist. Zeigen Sie, daß es einen Punkt $p \in U$ mit $K(p) > 0$ gibt.

Aufgabe 3 Es seien $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ Funktionen. Die durch

$$f(u, v) = (r(u) \cos v, r(u) \sin v, h(u))$$

gegebene eingebettete Fläche $f : \mathbb{R} \times [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3$ wird als *Drehfläche* bezeichnet. Die Raumkurve $c(u) = (r(u), 0, h(u))$ wird als *Meridiankurve* bezeichnet. Die Drehfläche entsteht durch die Drehung der Meridiankurve um die z-Achse. Wir nehmen an, daß $(h')^2 + (r')^2 = 1$ gilt, das heißt die Meridiankurve ist nach der Bogenlänge parametrisiert.

1. Berechnen Sie die erste und die zweite Fundamentalform der Drehfläche.
2. Zeigen Sie: Die Gaußkrümmung $K(u, v)$ erfüllt die Gleichung

$$r'' + K \cdot r = 0.$$

Aufgabe 4 Es seien M_1 und M_2 Riemannsche Mannigfaltigkeiten und $M = M_1 \times M_2$ das Riemannsche Produkt. Es sei R bzw. R_i der Krümmungstensor von M bzw. M_i.

1. Bestimmen Sie R aus R_1 und R_2.
2. Zeigen Sie, daß es immer eine Ebene in M gibt, deren Schnittkrümmung 0 ist.
3. Bestimmen Sie alle Schnittkrümmungen von $M = S^2 \times S^2$, wobei S^2 die Einheitssphäre mit Standardmetrik ist.