Lösungen zum fünften Übungsblatt

Aufgabe 1 (Ganzer Abschluß und Lokalisierung)

Sei $R \subset R'$ eine Ringerweiterung und $\overline{R}$ der ganze Abschluss von R in R'. Sei S eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge von R. Dann ist $S^{-1}\overline{R}$ der ganze Abschluss von $S^{-1}R$ in $S^{-1}R'$.

Beweis. Sei $\overline{S^{-1}R}$ der ganze Abschluss von $S^{-1}R$ in $S^{-1}R'$. Wir zeigen dass $S^{-1}\overline{R} \subseteq \overline{S^{-1}R}$ und $\overline{S^{-1}R} \subseteq S^{-1}\overline{R}$.

- Sei $x \in S^{-1}\overline{R}$, und schreibe $x = \frac{g}{s}$ mit $g \in \overline{R}$ and $s \in S$. Dann ist
$$g^n + a_{n-1}g^{n-1} + \cdots + a_1 g + a_0 = 0 \in R' \tag{$*$}$$
für $n \geq 0$ und Koeffizienten $a_0, \ldots, a_{n-1} \in R$. Wir multiplizieren $(*)$ mit s^{-n} und erhalten
$$\left(\frac{g}{s}\right)^n + \frac{a_{n-1}}{s}\left(\frac{g}{s}\right)^{n-1} + \cdots + \frac{a_1}{s^{n-1}}\frac{g}{s} + \frac{a_0}{s^n} = 0.$$
Da $\frac{\alpha_i}{s^{n-i}} \in S^{-1}R$, ist $x = \frac{g}{s} \in \overline{S^{-1}R}$.
- Sei nun umgekehrt $x \in \overline{S^{-1}R}$. Da $x \in S^{-1}R'$, dürfen wir $x = \frac{y}{s}$ für $y \in R'$ und $s \in S$ schreiben. Ferner gilt
$$x^n + \frac{a_{n-1}}{s_{n-1}}x^{n-1} + \cdots + \frac{a_1}{s_1}x + \frac{a_0}{s_0} = 0$$
für Koeffizienten $a_0, \ldots, a_{n-1} \in R, s_0, \ldots, s_{n-1} \in S$. Wir multiplizieren diese Formel mit $s^n s_0 s_1 \cdots s_{n-1}$ und erhalten
$$y^n + b_{n-1}y^{n-1} + \cdots + b_1 y + b_0 = 0$$
in $S^{-1}R$ für Koeffizienten $b_0, \ldots, b_{n-1}$. Daher existiert ein $t \in S$ mit
$$\begin{aligned} & t(y^n + b_{n-1}y^{n-1} + \cdots + b_1 y + b_0) = 0 \\ \Longrightarrow\ & t^n(y^n + b_{n-1}y^{n-1} + \cdots + b_1 y + b_0) = 0 \\ \Longrightarrow\ & (yt)^n + b_{n-1}t(yt)^{n-1} + \cdots + b_1 t^{n-1} y + b_0 t^n = 0 \end{aligned}$$
in R'. Folglich ist $yt \in \overline{R}$, also $x = \frac{x}{s} = \frac{yt}{st} \in S^{-1}\overline{R}$. □

Aufgabe 2 (Geometrische Deutung von Going Up und Going Down)

Sei $\varphi : R \to R'$ eine Ringerweiterung.

a) Dann sind äquivalent:

   (i) φ erfüllt Going Up: Sind $\mathfrak{p}_1 \subseteq \mathfrak{p}_2 \subseteq \cdots \subseteq \mathfrak{p}_n$ Primideale in R und $\mathfrak{q}_1 \subseteq \mathfrak{q}_2 \subseteq \cdots \subseteq \mathfrak{q}_m$ Primideale in R' mit $m \leq n$ und $\mathfrak{p}_i = \varphi^{-1}(\mathfrak{q}_i)$ für $1 \leq i \leq m$, so existieren Primideale $\mathfrak{q}_m \subseteq \mathfrak{q}_{m+1} \subseteq \cdots \subseteq \mathfrak{q}_n$ in R' mit $\mathfrak{p}_i = \varphi^{-1}(\mathfrak{q}_i)$ für $1 \leq i \leq m$.

   (ii) Für alle Primideale $\mathfrak{q} \subseteq R'$ und $\mathfrak{p} = \varphi^{-1}(\mathfrak{q})$ ist die Abbildung $\operatorname{Spec}(R'/\mathfrak{q}) \to \operatorname{Spec}(R/\mathfrak{p})$ surjektiv.

   (iii) $\operatorname{Spec}(\varphi)$ ist abgeschlossen, d.h. Bilder abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen.

   Beweis. (i) $\Longrightarrow$ (ii): Sei $\mathfrak{p}' \in \operatorname{Spec}(R/\mathfrak{p})$, d.h. $\mathfrak{p}' = \mathfrak{r}'/\mathfrak{p}$ für ein Primideal $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{r}' \subseteq R$. Nach (i) existiert ein Primideal $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{r} \subseteq R'$ mit $\mathfrak{r}' = \varphi^{-1}(\mathfrak{r})$. Damit ist das Bild von $\mathfrak{r}/\mathfrak{q}$ unter $\operatorname{Spec}(R'/\mathfrak{q}) \to \operatorname{Spec}(R/\mathfrak{p})$ gerade $\mathfrak{r}'/\mathfrak{p} = \mathfrak{p}'$.

   (ii) $\Longrightarrow$ (iii): Sei $A \subseteq \operatorname{Spec}(R')$ abgeschlossen, d.h. $A = V(I)$ für ein Ideal $I \subseteq R'$. Dann ist
$$\begin{aligned} A = \{\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} R' : I \subseteq \mathfrak{q}\} &= \bigcup_{I \subseteq \mathfrak{q}} Z(\mathfrak{q}) \\ \Longrightarrow \operatorname{Spec}(\varphi)(A) &= \bigcup_{I \subseteq \mathfrak{q}} \operatorname{Spec}(\varphi)(Z(\mathfrak{q})) \end{aligned}$$

Im kommutierenden Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Spec}(R'/\mathfrak{q}) & \longrightarrow & \mathrm{Spec}(R/\mathfrak{p}) \\ \downarrow & & \\ \mathrm{Spec}(R') & \longrightarrow & \mathrm{Spec}(R), \end{array}$$

ist das Bild von $\mathrm{Spec}(R'/\mathfrak{q})$ in $\mathrm{Spec}(R')$ die Menge der Primideale, die $\mathfrak{q}$ enthalten, also $V(\mathfrak{q})$. Ebenso ist das Bild von $\mathrm{Spec}(R/\mathfrak{p})$ gerade $V(\mathfrak{p})$. Da die obere Zeile des Diagramms nach Voraussetzung surjektiv ist, ist $\mathrm{Spec}(\varphi)(V(\mathfrak{q})) = V(\varphi^{-1}(\mathfrak{q}))$. Nun gilt

$$\begin{aligned} &\bigcup_{I \subseteq \mathfrak{q}} \mathrm{Spec}(\varphi)(Z(\mathfrak{q})) = \bigcup_{I \subseteq \mathfrak{q}} Z(\varphi^{-1}(\mathfrak{q})) \\ &= \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\, R \mid \exists I \subseteq \mathfrak{q} : \varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \subseteq \mathfrak{p}\} \overset{(*)}{\supseteq} \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\, R \mid \varphi^{-1}(I) \subseteq \mathfrak{p}\} = Z(\varphi^{-1}(I)). \end{aligned}$$

Wenn wir zeigen können, dass $(*)$ eine Gleichheit von Mengen ist, so sind wir fertig, da $Z(\varphi^{-1}(I))$ eine abgeschlossene Menge von $\mathrm{Spec}\, R$ ist.

Sei $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\, R$ ein Primideal, das $\varphi^{-1}(I)$ enthält. Dann ist $S := R \setminus \mathfrak{p}$ eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge von R' mit $S \cap I = \emptyset$ (da $S \cap I \subseteq S \subseteq R$ und $I \cap R = \subseteq \mathfrak{p}$). Daher ist $S^{-1}I$ ein echtes Ideal in $S^{-1}R'$; denn wäre $S^{-1}I = S^{-1}R$, so könnten wir $\frac{i}{s} = \frac{1}{1}$ für gewisse $i \in I, s \in S$ schreiben, und dann gäbe es ein $t \in S$ mit $t(i - s) = 0$, folglich $it = ts \in I \cap S$, Widerspruch. Folglich existiert ein Primideal $\tilde{\mathfrak{q}} \subseteq S^{-1}R'$ mit $S^{-1}I \subseteq \tilde{\mathfrak{q}}$. Das Urbild $\mathfrak{q}$ von $\tilde{\mathfrak{q}}$ in R' ist nun ein Primideal, das I enthält und $\mathfrak{q} \cap S = \emptyset$ erfüllt. Daher ist $\varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \subseteq \mathfrak{p}$. Damit ist $(*)$ eine Gleichheit und wir sind für diesen Teilschritt fertig.

(iii) $\Longrightarrow$ (i): Induktion nach m. Ist $m = n$, so ist nichts zu zeigen. Angenommen nun, es sind Primideale $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$ wie in (i) gegeben und wir haben bereits Primideale $\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_{n-1}$ wie in (i) gefunden. Nun ist $\mathrm{Spec}(\varphi)(V(\mathfrak{q}_{n-1}))$ in $\mathrm{Spec}\, R$ eine abgeschlossene Teilmenge (nach (iii)), die $\mathfrak{p}_{n-1}$ enthält (da $\mathrm{Spec}(\varphi)(\mathfrak{q}_{n-1}) = \mathfrak{p}_{n-1}$). Jede abgeschlossene Teilmenge $V(I)$ von $\mathrm{Spec}\, R$, die $\mathfrak{p}_{n-1}$ enthält (d.h. $I \subseteq \mathfrak{p}_{n-1}$), enthält auch $\mathfrak{p}_n$ (da $I \subseteq \mathfrak{p}_{n-1} \subseteq \mathfrak{p}_n$), d.h. $\mathfrak{p}_n \in \mathrm{Spec}(\varphi)(V(\mathfrak{q}_{n-1}))$. Mit anderen Worten, es existiert ein $\mathfrak{q}_n \in V(\mathfrak{q}_{n-1})$ sodass $p_n = \varphi^{-1}(\mathfrak{q}_n)$. □

b) Es sind äquivalent:

(i) φ erfüllt Going Down: Für $\mathfrak{p}_1 \supseteq \cdots \supseteq \mathfrak{p}_n$ in $\mathrm{Spec}\, R$ und $\mathfrak{q}_1 \supseteq \cdots \supseteq \mathfrak{q}_m$ mit $m \leq n$ und $\mathfrak{p}_i = \varphi^{-1}(\mathfrak{q}_i)$ für $1 \leq i \leq m$ existieren $\mathfrak{q}_m \supseteq \cdots \supseteq \mathfrak{q}_m$ mit $\mathfrak{p}_i = \varphi^{-1}(\mathfrak{q}_i)$ für $1 \leq i \leq n$.

(ii) Für alle Primideale $\mathfrak{q} \subseteq R'$ und $\mathfrak{p} = \varphi^{-1}(\mathfrak{q})$ ist die Abbildung $\mathrm{Spec}(R'_{\mathfrak{q}}) \to \mathrm{Spec}(R_{\mathfrak{p}})$ surjektiv.

Beweis. Nach einem Induktionsargument wie oben ist (i) äquivalent zu

(i') Für $\mathfrak{p}_1 \supseteq \mathfrak{p}_2$ in $\mathrm{Spec}\, R$ mit $\mathfrak{p}_1 = \varphi^{-1}(\mathfrak{q}_1)$ für $\mathfrak{q}_1 \in \mathrm{Spec}\, R'$ existiert ein $\mathfrak{q}_2 \in \mathrm{Spec}\, R'$ mit $\mathfrak{q}_1 \supseteq \mathfrak{q}_2$ und $\mathfrak{p}_2 = \varphi^{-1}(\mathfrak{q}_2)$.

Beim Lösen von Aufgabe 3 des zweiten Übungsblattes sahen wir, dass die Lokalisierungsabbildung $R \to R_{\mathfrak{p}}$ eine Bijektion

$$\mathrm{Spec}(R_{\mathfrak{p}_1}) \to \{\mathfrak{p}_2 \in \mathrm{Spec}\, R : \mathfrak{p}_1 \supseteq \mathfrak{p}_2\}$$

induziert. Damit wird (ii) äquivalent zu

(ii') Die Abbildung

$$\{\mathfrak{q}_2 \in \mathrm{Spec}\, R' : \mathfrak{q}_1 \supseteq \mathfrak{q}_2\} \xrightarrow{\mathrm{Spec}(\varphi)} \{\mathfrak{p}_2 \in \mathrm{Spec}\, R : \mathfrak{p}_1 \supseteq \mathfrak{p}_2\}$$

ist surjektiv.

Nun ist (i') $\iff$ (ii') nach Definition von $\mathrm{Spec}\, \varphi$. □

Aufgabe 3 (Hilfslemma)

Sei $\varphi : R \to R'$ ein Ringhomomorphismus und $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$. Dann sind äquivalent:

(i) Es existiert ein Primideal $\mathfrak{q} \subseteq R'$ mit $\mathfrak{p} = \varphi^{-1}(\mathfrak{q})$.

(ii) $\varphi^{-1}(\varphi(\mathfrak{p})R') = \mathfrak{p}$.

Beweis. (i) $\Longrightarrow$ (ii): Sicherlich ist $\mathfrak{p} \subseteq \varphi^{-1}(\varphi(\mathfrak{p})R')$. Ist nun $\mathfrak{q}$ wie in (i), so ist $\varphi(\mathfrak{p}) \subseteq \mathfrak{q}$, also $R'\varphi(\mathfrak{p}) \subseteq \mathfrak{q}$ und $\varphi^{-1}(\varphi(\mathfrak{p})R') \subseteq \varphi^{-1}(\mathfrak{q}) = \mathfrak{p}$.

(ii) $\Longrightarrow$ (i): Sei $S := R \setminus \mathfrak{p}$, dies ist eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge. Ebenso ist $\varphi(S) \subseteq R'$ multiplikativ abgeschlossen. Nun ist $I := \varphi(\mathfrak{p})R'$ ein Ideal in R' mit $\varphi^{-1}(I \cap \varphi(S)) = \mathfrak{p} \cap S = \emptyset$, also $I \cap \varphi(S) = \emptyset$. Betrachte nun

$$\varphi(S)^{-1}I := \left\{ \frac{i}{s} \mid i \in I, s \in \varphi(S) \right\} \subseteq \varphi(S)^{-1}R'.$$

$\varphi(S)^{-1}I$ ist ein Ideal in $\varphi(S)^{-1}R'$. Wäre $\varphi(S)^{-1}I = \varphi(S)^{-1}R$, gäbe es $i \in I, s \in \varphi(S)$ mit $\frac{i}{s} = 1$ in $\varphi(S)^{-1}R$, also $\exists t \in \varphi(S) : t(i-s) = 0$. Dann wäre aber $it \in I$ und $ts \in \varphi(S)$, also $it = ts \in I \cap \varphi(S)$, Widerspruch.

Wir sehen: $\varphi(S)^{-1}I$ ist ein echtes Ideal in $\varphi(S)^{-1}R'$. Dann existiert ein Primideal $\tilde{\mathfrak{q}} \subseteq \varphi(S)^{-1}R'$ mit $\varphi(S)^{-1}I \subseteq \tilde{\mathfrak{q}} \subseteq \varphi(S)^{-1}R'$. Nach der Charakterisierung von Primidealen in Lokalisierungen existiert also ein Primideal $\mathfrak{q} \subseteq R$ mit $\mathfrak{q} \cap \varphi(S) = \emptyset$ und $I \subseteq \mathfrak{q}$.

Dann ist einerseits $\mathfrak{p} = \varphi^{-1}(I) \subseteq \varphi^{-1}(\mathfrak{q})$, andererseits ist $\varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \cap S = \emptyset$, also $\varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \subseteq \mathfrak{p}$. Insgesamt erhalten wir $\varphi^{-1}(\mathfrak{q}) = \mathfrak{p}$. $\square$

Aufgabe 4 (Zahlkörper)

Sei $x = a + b\sqrt{d} \in \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ mit $a, b \in \mathbb{Q}$. Wir bestimmen zunächst das Minimalpolynom von x über $\mathbb{Q}$. Falls $b = 0$, so ist dieses durch $X - a$ gegeben. Andernfalls ist wegen

$$(x-a)^2 = b^2 d \Longrightarrow x^2 - 2ax + a^2 - b^2 d = 0 \qquad (*)$$

das Minimalpolynom gerade $X^2 - 2aX + a^2 - b^2 d$. Aus $(*)$ folgt dass $x \in \overline{R}$ falls $-2a, a^2 - b^2 d \in \mathbb{Z}$.

Es bleibt zu zeigen, dass aus $x \in \overline{R}$ bereits $-2a, a^2 - b^2 d \in \mathbb{Z}$ folgt. Angenommen es sei $p \in \mathbb{Z}[X]$ ein normiertes Polynom mit $p(x) = 0$. Wir dürfen annehmen, dass p in $\mathbb{Z}[X]$ irreduzibel ist (ist $p = p_1 p_2$, so ist $p_1(x) = 0$ oder $p_2(x) = 0$). Dann ist auch p in $\mathbb{Q}[X]$ irreduzibel (nach der Theorie irreduzibler Polynome in faktoriellen Ringen). Folglich ist $p \in \mathbb{Z}[X]$ das Minimalpolynom von x über $\mathbb{Q}$. Wir unterscheiden zwei Fälle:

- $x \in \mathbb{Q}$, d.h. $b = 0$. Da x ganz über $\mathbb{Z}$ ist, und $\mathbb{Z}$ ganz abgeschlossen, ist $x \in \mathbb{Z}$. Also $a \in \mathbb{Z}$ und damit sind $-2a$ und $a^2 - b^2 d = a^2$ in $\mathbb{Z}$.
- $x \notin \mathbb{Q}$, d.h. $p = X()X^2 - 2aX + a^2 - b^2 d$. Also ist $-2a, a^2 - b^2 d \in \mathbb{Z}$. $\square$

Ist beispielsweise $d = 5$, so ist $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ganz über $\mathbb{Z}$, aber nicht in $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\sqrt{5}$: $a = b = \frac{1}{2}$ und damit ist $-2a = -1$ und $a^2 - b^2 d = \frac{1-5}{4} = -1$. Allgemein gilt:

$$\overline{R} = \begin{cases} \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\sqrt{d} : d \not\equiv 1 \pmod 4 \\ \mathbb{Z}\left[\frac{1+\sqrt{d}}{2}\right] : d \equiv 1 \pmod 4 \end{cases}.$$