Lösungen zum zweiten Übungsblatt

Aufgabe 1

Sei $e \in R$ ein idempotentes Element in einem lokalen Ring R. Dann ist $e \in \{0,1\}$ (und damit insbesondere $\operatorname{Spec} R$ zusammenhängend).

Da $e(1-e) = e - e^2 = 0$ kann e nur dann eine Einheit sein, wenn $1 - e = 0$, d.h. $e = 1$. Ebenso kann $1 - e$ nur dann eine Einheit sein, wenn $e = 0$.

Ist daher $e \neq 0, 1$, so sind e und $1 - e$ beides nicht-Einheiten, d.h. Elemente des maximalen Ideals in R. Dann ist auch $1 = e + (1 - e)$ im maximalen Ideal enthalten, was ein Widerspruch ist.

In Aufgabe 3 des ersten Übungsblatts wurde gezeigt, dass dann $\operatorname{Spec} R$ zusammenhängend ist.

(Alternativ kann man zeigen, dass das maximale Ideal von R in jeder nicht-leeren abgeschlossenen Teilmenge von $\operatorname{Spec} R$ liegt, damit kann es keine nicht-leeren und disjunkten abgeschlossenen Teilmengen geben). □

Aufgabe 2

Sei $\varphi : R \to R'$ ein Ringhomomorphismus und $\operatorname{Idem}(R)$ die Menge der Idempotente von R. Zeigen Sie:

(i) *Der Ringhomomorphismus φ induziert eine Abbildung $\operatorname{Idem}(\varphi) : \operatorname{Idem}(R) \to \operatorname{Idem}(R')$.*

Für $e \in \operatorname{Idem}(R)$ prüft man leicht

$$\varphi(e)^2 = \varphi(e^2) \underset{e^2=e}{=} \varphi(e)$$

nach. Damit ist $\varphi(e) \in \operatorname{Idem}(R')$ und das Bild von $\varphi|_{\operatorname{Idem}(R)}$ liegt in $\operatorname{Idem}(R')$.

(ii) *Sei $I \subseteq R$ ein Ideal und $q : R \to R/I$ die Quotientenabbildung. Dann ist $\operatorname{Idem}(q)$ injektiv falls $I \subseteq \operatorname{Jac}R$.*

Sei $I \subseteq \operatorname{Jac}R$ und seien $e, e' \in \operatorname{Idem}(R)$ mit $\operatorname{Idem}(q)(e) = \operatorname{Idem}(q)(e')$, d.h. $e - e' \in I \subseteq \operatorname{Jac}R$.

- Ein direkter Beweis verwendet, dass $\operatorname{Jac}R$ dadurch charakterisiert werden kann, dass (in unserem Fall) $1 + r(e - e') \in R^\times$ für alle $r \in R$ gelten muss. Dann ist
$$\begin{aligned}(e-e')(-1+(e-e')^2) &= -e + e' + (e-e')^3 = -e + e' + e^3 - 3e^2e' + 3e(e')^2 - (e')^3 \\ &= -e + e' + e - 3ee' + 3ee' - e' = 0,\end{aligned}$$
folglich ist $e - e' = 0$.
- Ein anderer Ansatz betrachtet den R-Modul $M = Re + Re'$. Dann ist $M/(\operatorname{Jac}R)M$ erzeugt durch $e + (\operatorname{Jac}R)M$, also nach Nakayamas Lemma auch $M = Re$. Folglich ist $e' \in Re$. Analog zeigt man $e \in Re'$, d.h. $e' = \rho e$ und $e = \sigma e'$ für $\rho, \sigma \in R$. Dann ist
$$\rho e = e' = (e')^2 = \rho^2 e^2 = \rho^2 e \Longrightarrow e = \sigma\rho e = \sigma\rho^2 e = \rho e = e'.$$

(iii) *Gilt zusätzlich $I \subseteq \operatorname{Nil}(R)$, so ist $\operatorname{Idem}(q)$ bijektiv.*

Wir sahen oben, dass $\operatorname{Idem}(q)$ injektiv ist. Sei also $e + I \in R/I$ eine Idempotente. Dann ist auch $1 - e + I \in R/I$ eine Idempotente. D.h. für alle $n \geq 1$ gilt $e - e^n \in I$ und $(1-e) - (1-e)^n \in I$. Da $e(1-e) \in I$, können wir $n > 0$ so wählen, dass $e^n(1-e)^n = 0$ in R.

Nun ist das Ideal in R, das von e^n und $(1-e)^n$ erzeugt wird, bereits ganz R, denn sonst gäbe es ein maximales Ideal $\mathfrak{m}$ mit $e^n \in \mathfrak{m}$ (also $e \in \mathfrak{m}$) und $(1-e)^n \in \mathfrak{m} \Longrightarrow 1 - e \in \mathfrak{m}$ und insgesamt $1 \in \mathfrak{m}$, was einen Widerspruch darstellt.

Also existieren $r, s \in R$ mit $re^n + s(1-e)^n = 1$. Nun ist $re^n(1 - re^n) = rse^n(1-e)^n = 0$, also ist re^n eine Idempotente in R. Andererseits gilt $1 + I = re^n + s(1-e)^n = re + s(1-e) + I = s + (r-s)e + I$ in R/I. Folglich ist

$$(r-s)e + I = (r-s)e^2 + I = (1-s)e + I \Longrightarrow re^n + I = re + I = e + I,$$

d.h. $re^n \in \operatorname{Idem}(R)$ ist ein Urbild von $e + I$ in $\operatorname{Idem}(R/I)$.

(Alternativbeweis: Wir sahen im Beweis von Aufgabe 3 des ersten Übungsblattes, dass eine 1-zu-1-Beziehung zwischen Zerlegungen von $\operatorname{Spec} R = A \dot\cup B$ in zwei disjunkte abgeschlossene Teilmengen und Paaren von Idempotenten $(e, 1-e)$ in R besteht. Nun ist $\operatorname{Spec}(R/I) \xrightarrow{\operatorname{Spec} q} \operatorname{Spec} R$ ein isomorphismus von topologischen Räumen). □

Aufgabe 3

Sei R ein Ring und $\mathfrak{p}$ ein Primideal. Zeigen Sie, dass das Bild von $\operatorname{Spec} R_{\mathfrak{p}}$ in $\operatorname{Spec} R$ der Schnitt aller offenen Umgebungen von $\mathfrak{p}$ in $\operatorname{Spec} R$ ist.

Die Primideale in $R_{\mathfrak{p}} = S^{-1}R$, wobei $S = R \setminus \mathfrak{p}$, sind nach der Vorlesung (Theorem 1.46) gerade die Ideale der Form $\mathfrak{q}R_{\mathfrak{p}}$, wobei $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} R$ und $\mathfrak{q} \cap S = \emptyset$. Daher ist das Bild von $\operatorname{Spec}(R \to R_{\mathfrak{p}})$ gegeben durch

$$\{\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} R \mid \mathfrak{q} \cap S = \emptyset\} = \{\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} R \mid \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}\}.$$

Nun gilt:

- Ist $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} R$ eine Teilmenge von $\mathfrak{p}$ und $U = \operatorname{Spec} R \setminus Z(I)$ eine offene Umgebung von $\mathfrak{p}$, d.h. I ein Ideal in R und $I \not\subseteq \mathfrak{p}$, so gilt $I \not\subseteq \mathfrak{q}$ (da sonst $I \subseteq \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}$), also $\mathfrak{q} \in U$.
- Ist $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} R$ in allen offenen Umgebungen von $\mathfrak{p}$ enthalten, so betrachten wir $U := \operatorname{Spec} R \setminus Z(\mathfrak{q})$. Dieses ist eine offene Teilmenge von $\operatorname{Spec} R$, die $\mathfrak{q}$ nicht enthält. Nach der Annahme ist also auch $\mathfrak{p} \notin U$, und folglich $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}$.

Wir sehen:

$$\{\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} R \mid \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}\} = \bigcap_{\substack{U \subseteq \operatorname{Spec} R \text{ offen} \\ \mathfrak{p} \in U}} U.$$

Dies beendet den Beweis. □

Aufgabe 4

Ein topologischer Raum X heißt irreduzibel[1]*, falls jede Zerlegung $X = X_1 \cup X_2$ in abgeschlossene Teilmengen X_i impliziert, dass X_1 oder X_2 schon ganz X ist.*

(i) *Falls $Z \subset X$ irreduzibel und $U \subset X$ eine offene Teilmenge mit $U \cap Z \neq \emptyset$ ist, so ist $\overline{U \cap Z} = Z$.*

Da nicht gegeben ist, dass Z in X abgeschlossen ist, interpretieren wir $\overline{U \cap Z}$ als Abschluss von $U \cap Z$ in Z. Dann ist $Z_1 := \overline{U \cap Z}$ eine abgeschlossene Teilmenge von Z, ebenso auch $Z_2 := Z \setminus U$. Nun ist $Z = Z_1 \cup Z_2$, also $Z = Z_1$ (was wir zeigen wollen) oder $Z = Z_2$. In letzterem Fall ist aber $U \cap Z = \emptyset$, im Gegensatz zur Voraussetzung.

(ii) *Eine abgeschlossene Teilmenge $Z \subset \operatorname{Spec} R$ ist irreduzibel genau dann wenn $Z = Z(\mathfrak{p})$ für ein eindeutig bestimmtes Primideal $\mathfrak{p}$ gilt.*

Jede abgeschlossene Teilmenge von $\operatorname{Spec} R$ lässt sich bekanntlich als $Z(I)$ für ein eindeutig bestimmtes Ideal $I \subseteq R$ mit $I = \sqrt{I}$ schreiben. Da jedes Primideal $\mathfrak{p} \subseteq R$ bereits $\mathfrak{p} = \sqrt{\mathfrak{p}}$ erfüllt, ist $\mathfrak{p}$ durch $Z(\mathfrak{p})$ bereits eindeutig bestimmt.

Es verbleibt daher zu zeigen: $Z(I)$, mit $I = \sqrt{I} \subseteq R$ ein Ideal, ist genau dann irreduzibel, wenn I ein Primideal ist.

Eine Zerlegung in abgeschlossene Teilmengen $Z(I) = Z_1 \cup Z_2$ muss die Form $Z_1 = Z(I_1), Z_2 = Z(I_2)$ für Ideale $I \subseteq I_i \subseteq R$ haben, sodass $Z(I) = Z(I_1 \cdot I_2)$ gilt, d.h. $\sqrt{I_1 \cdot I_2} = I$. $Z(I)$ ist irreduzibel genau dann, wenn hieraus stets $I = \sqrt{I_1}$ oder $I = \sqrt{I_2}$ folgt (und $Z(I) \neq \emptyset$, d.h. $I \neq R$).

- Angenommen, I sei ein Primideal, und $\sqrt{I_1 \cdot I_2} = I$. Dann ist $I_1 \cdot I_2 \subseteq I$. Falls $I_1 \subseteq I$, so sind wir fertig. Andernfalls sei $a \in I_1$ so gewählt, dass $a \notin I$. Für alle $b \in I_2$ gilt dann $ab \in I_1 \cdot I_2 \subseteq I$, aber $a \notin I$, sodass $b \in I$ folgt, da I ein Primideal ist. Daher ist $I_2 \subseteq I$, also $I = I_2$. Außerdem ist $I \neq R$.
- Angenommen nun, $Z(I)$ sei irreduzibel. Angenommen es gäbe Elemente $a, b \in R$ mit $ab \in I$. Wir wollen zeigen, dass $a \in I$ oder $b \in I$. Sei $I_1 = I + aR$ und $I_2 = I + bR$. Dann ist $I \subseteq I_i \subseteq R$ und $I^2 \subseteq I_1 I_2 \subseteq I$, also $\sqrt{I_1 I_2} = I$. Dann ist, nach Annahme, $I_1 \subseteq I$ (also $a \in I$) oder $I_2 \subseteq I$ (also $b \in I$). Da außerdem $I \neq R$ vorausgesetzt wurde, ist I ein Primideal.

Wir sehen: $Z(I)$ ist irreduzibel genau dann, wenn I ein Primideal ist. □

[1] Man findet in der Literatur häufig die zusätzliche Forderung $X \neq \emptyset$.

Aufgabe 5

Eine Teilmenge $S \subset X$ in einem topologischen Raum X liegt per Definition dicht *in X, falls $\overline{S} = X$. Sei $\varphi : R \to R'$ ein Ringhomomorphismus und* $\operatorname{Spec}(\varphi) : \operatorname{Spec} R' \to \operatorname{Spec} R$ *die induzierte Abbildung. Zeigen Sie: Das Bild von* $\operatorname{Spec}(\varphi)$ *liegt dicht in* $\operatorname{Spec} R$ *genau dann, wenn* $\operatorname{Ker}(\varphi) \subseteq \operatorname{Nil}(R)$.

Wir wollen untersuchen, welche abgeschlossenen Teilmengen $Z(I) \subseteq \operatorname{Spec} R$ das Bild von $\operatorname{Spec}(\varphi)$ enthalten können. Das Bild von $\operatorname{Spec}(\varphi)$ besteht nach Definition aus allen $\varphi^{-1}(\mathfrak{p})$ für $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R'$. $Z(I)$ enthält das Bild von $\operatorname{Spec}(\varphi)$ genau dann, wenn $I \subseteq \varphi^{-1}(\mathfrak{p})$ für alle $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R'$, d.h.

$$I \subseteq \bigcap_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R'} \varphi^{-1}(\mathfrak{p}) = \varphi^{-1}\left(\bigcap_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R'} \mathfrak{p}\right) = \varphi^{-1}(\operatorname{Nil}(R')) = \varphi^{-1}\left(\sqrt{\{0\}}\right) = \sqrt{\varphi^{-1}(\{0\})} = \sqrt{\operatorname{Ker}(\varphi)}.$$

Damit können wir die Aufgabe wie folgt lösen:

- Angenommen $\operatorname{Ker}(\varphi) \subseteq \operatorname{Nil}(R)$ und $\operatorname{Spec}(\varphi)(\operatorname{Spec} R') \subseteq Z(I)$ für ein Ideal I. Dann ist $I \subseteq \sqrt{\operatorname{Ker}(\varphi)} \subseteq \operatorname{Nil}(R)$, also ist $Z(I) = \operatorname{Spec} R$ und damit liegt $\operatorname{Spec}(\varphi)(\operatorname{Spec} R')$ dicht.
- Angenommen, $\operatorname{Spec}(\varphi)(\operatorname{Spec} R')$ liege dicht. Sei $I = \operatorname{Ker}(\varphi)$, dann ist das Bild von $\operatorname{Spec}(\varphi)$ in $Z(I)$ enthalten. Also gilt $Z(I) = \operatorname{Spec} R$, d.h. $I \subseteq \operatorname{Nil}(R)$. Damit ist $\operatorname{Ker}(\varphi) \subseteq \operatorname{Nil}(R)$. $\square$