Blatt 4 Aufgabe 1 : i) $\Rightarrow$ ii) $\Rightarrow$ iii) klar

iii) $\Rightarrow$ i): Angenommen $M \neq 0$ und $x \in M$, $x \neq 0$

Da $M \neq 0$ ist $\mathrm{Ann}(x) \neq R$, also liegt $\mathrm{Ann}(x) \subseteq m$ in einem maximalen Ideal m.

Für alle maximalen m gilt $M_m = 0$ $\Rightarrow \frac{x}{1} = 0$ in M_m

$\Rightarrow \exists n \in R \setminus m$ so dass $nx = 0$

$\Rightarrow n \in \mathrm{Ann}(x) \subseteq m$ ↯

Blatt 4 Aufgabe 2 i) $\Rightarrow$ ii) $\Rightarrow$ iii) klar

iii) $\Rightarrow$ i) Für die Injektivität ist zz dass $\ker(f) = 0$ ist und für die Surjektivität, dass $\mathrm{coker}(f) = 0$ ist.

Betrachte

$$0 \to \ker(f) \to M \xrightarrow{f} N \to \mathrm{coker}(f) \to 0$$

Für maximales m ist dann

$$0 \to (\ker f)_m \to M_m \xrightarrow{f_m} N_m \to (\mathrm{coker}(f))_m \to 0$$

exakt, denn Lokalisierung ist exakt.

Aus der Exaktheit folgt $(\ker f)_m = \ker f_m$, $(\mathrm{coker}\, f)_m = \mathrm{coker}\, f_m$

Also ist $(\ker f)_m = 0$ und $(\mathrm{coker}\, f)_m = 0$ $\forall$ maximale m

Mit Aufg 1 folgt $\ker f = 0$, $\mathrm{coker}\, f = 0$.

Blatt 4 Aufgabe 3

i) • Seien $m, n \in T(M)$, $\bar{a} \in R$. Dann existieren $a, b \in R$ mit $a \cdot m = 0$, $b \cdot n = 0$

R Int.bereich $\Rightarrow ab \neq 0$ und $ab(m+n) = 0$

$\Rightarrow m+n \in T(M)$

~~Addition~~ $r \cdot m \in T(M)$: trivial.

• Nehme etwa $R = \{0, a, 1-a, 1\}$ mit $a^2 = a$, $a + a = 1 + 1 = 0$ und $M = R$.

Dann sind $a, 1-a \in T(M)$, aber $a + (1-a) = 1 \notin T(M)$.

iii) Sei $\bar{x} \in M / T(M)$ mit $a\bar{x} = 0$ für $a \in R \setminus \{0\}$.

$\Rightarrow ax \in T(M)$ für alle Repr x in M.

$\Rightarrow \exists b \in R$ mit $\underbrace{ba}_{\neq 0} x = 0$

$\Rightarrow x \in T(M)$

$\Rightarrow \bar{x} = 0$

iv) trivial

v) Für $M' \xrightarrow{f} M$ ist $T(M') \longrightarrow T(M)$ nur die Einschränkung auf $T(M')$ und damit inj. falls f injektiv.

Dito folgt aus $g \circ f = 0$, dann $T(g) \circ T(f) = 0$.

zz: $m \in T(M) \cap \ker(g) \Rightarrow m$ im Bild von $T(f)$.

$m \in \operatorname{Im}(f) \Rightarrow \exists n \in M'$ mit $m = f(n)$

m Torsion $\Rightarrow \exists a \in R$ mit $a \cdot m = 0$

Aber $f(an) = 0$ impliziert wg f injektiv, dass $an = 0$.

vi) Sei $m \in T(M)$ $\Rightarrow \exists\, a \in R$ mit $a \cdot m = 0$

$$\Rightarrow a\left(\frac{m}{s}\right) = 0$$

$$\Rightarrow S^{-1}(T(M)) \subset T(S^{-1}M)$$

Sei $\frac{x}{s} \in T(S^{-1}M)$ $\Rightarrow \exists\, \frac{a}{s} \in S^{-1}R$ mit $\frac{a}{s} \cdot \frac{x}{s} = 0$

$$\Rightarrow \exists\, u \in S \text{ mit } uax = 0$$

R Int.bereich $\Rightarrow x \in T(M) \Rightarrow \frac{x}{s} \in S^{-1}(T(M))$.

vii) Dies folgt aus Aufgabe 2; denn torsionsfrei bedeutet, dass die Abbildung $M \to M$, $x \mapsto ax$, für jedes $a \in R$ injektiv ist. Für M_m mit $s \in R \setminus m$ muß dann $M_m \to M_m$, $x \mapsto \frac{a}{s} x$ injektiv sein (für torsionfrei).

ii) trivial, denn für $x \in T(M) = M$ gilt $rx = 0$ für ein $r \neq 0$.