Thorsten Heidersdorf
Universität Bonn Sommersemester 2019

Übungen zur Vorlesung Algebra 1
—Blatt 9—

Aufgabe 1 (15 Punkte). (Regularität) Sei R ein noetherscher lokaler Ring mit $\dim R = d$. Sei m das maximale Ideal von R und sei $k = R/m$. Zeigen Sie:

(i) $d \leq \dim_k m/m^2$.

(ii) Es gilt $d = \dim_k m/m^2$ genau dann wenn m von d Elementen erzeugt werden kann. In diesem Fall nennen wir R regulär.

Sei jetzt k ein algebraisch abgeschlossener Körper und $f \in k[x_1, \ldots, x_n]$ ein Produkt paarweise verschiedener irreduzibler Polynome. Ein Punkt $P \in V(f)$ heisst nichtsingulär wenn es ein $i \in \{1, \ldots, n\}$ mit $\frac{\partial f}{\partial x_i}(P) \neq 0$ gibt, wobei $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ die formale Ableitung von f nach x_i ist. Zeigen Sie:

(iii) $P \in Z(f)$ ist nichtsingulär genau dann wenn der lokale Ring $(k[x_1, \ldots, x_n]/(f))_m$ regulär ist, wobei m das zu P gehörige maximale Ideal ist.

Aufgabe 2 (10 Punkte). (Höhe und kleine Dimension) Sei R ein Ring und $p \in \operatorname{Spec} R$. Zur Erinnerung: Die Höhe von p ist gegeben durch $\operatorname{ht}(p) = \dim R_p$. Zeigen Sie:

(i) Ist R noethersch und $q \in \operatorname{Spec} R$ mit $\operatorname{ht}(q) \geq 2$, dann ist q Vereinigung unendlich vieler unterschiedlicher Primideale $p \in \operatorname{Spec} R$ mit $\operatorname{ht}(p) = 1$.

(ii) Ist $\operatorname{Spec}(R)$ endlich und R noethersch, so ist $\dim R \leq 1$.

(iii) Es gibt einen Ring R mit $\dim(R) = 0$ und einen noetherschen Ring R' mit $\dim(R') = 1$ sodass $\operatorname{Spec}(R)$ und $\operatorname{Spec}(R')$ unendlich sind.

Abgabe: Donnerstag, 06.06.2019, um 14 Uhr vor der Vorlesung.