

Übungen zur Vorlesung Algebra 1 —Blatt 7—

Aufgabe 1 (10 Punkte). („Prime avoidance“) Sei R ein Ring, $p, p_1, \dots, p_m \in \operatorname{Spec} R$ Primideale und $I, I_1, \dots, I_n$ Ideale von R . Zeigen Sie:

- (i) Ist $I \subseteq \bigcup_{i=1, \dots, m} p_i$, so existiert ein $i \in \{1, \dots, m\}$ mit $I \subseteq p_i$.
- (ii) Ist $\bigcap_{i=1, \dots, m} I_i \subseteq p$, so existiert ein $i \in \{1, \dots, m\}$ mit $I_i \subseteq p$.
- (iii) Ist $\bigcap_{i=1, \dots, m} I_i = p$, so existiert ein $i \in \{1, \dots, m\}$ mit $I_i = p$.
- (iv) Für beliebige Ringe R und Teilmengen $J \subseteq \operatorname{Spec} R$ impliziert $I \subseteq \bigcup_{p_i \in J} p_i$ nicht unbedingt, dass $I \subseteq p_i$ für ein $p_i \in J$ gilt.

Aufgabe 2 (10 Punkte). (Charakterisierungen von Jacobson-Ringen) Sei R ein Ring. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

- (i) R ist ein Jacobson-Ring.
- (ii) Ist B ein Körper, der als R -Algebra endlich erzeugt ist, so ist B als R -Modul endlich erzeugt.
- (iii) Für $p \in \operatorname{Spec} R$ mit $p \notin \operatorname{Specm} R$ gilt

$$p = \bigcap_{q \in \operatorname{Spec} R, q \supsetneq p} q.$$

- (iv) Für jeden Ringhomomorphismus $f : R \rightarrow R'$ ist das Nilradikal von $f(R)$ gleich dem Jacobsonradikal von $f(R)$.

Folgern Sie daraus, dass jeder Körper, der als Ring (d.h. als $\mathbb{Z}$ -Algebra) endlich erzeugt ist, ein endlicher Körper ist.

Aufgabe 3 (5 Punkte). (Polynomringe) Beschreiben Sie die Primideale von $\mathbb{C}[X, Y]$. Falls $p \in \operatorname{Spec} \mathbb{C}[X, Y]$ nicht maximal ist, wie sieht sein Abschluss geometrisch aus?

Aufgabe 4 (5 Punkte). (Irreduzibilität) Welche der folgenden Varietäten sind irreduzibel?

- (i) $V(xy^3)$
- (ii) $V(x^2 + y^3 + xy)$

Aufgabe 5 (10 Punkte). (Varietäten) Sei K algebraisch abgeschlossen. Welche der folgenden Teilmengen eines geeigneten affinen Raumes $\mathbb{A}_K^n$ ist eine (affine) Varietät?

- (i) $\{(x, \sin(x)) \mid x \in \mathbb{C}\} \subset \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2$.
- (ii) Die Menge aller $n \times n$ Matrizen vom Rank k (für $0 \leq k \leq n$) in $\mathbb{A}_K^{n^2}$.
- (iii) Die Menge aller nilpotenter $n \times n$ Matrizen in $\mathbb{A}_K^{n^2}$.

Abgabe: Donnerstag, 23.05.2019, um 14 Uhr vor der Vorlesung.