Thorsten Heidersdorf
Universität Bonn

Sommersemester 2019

Übungen zur Vorlesung Algebra 1
—Blatt 6—

Aufgabe 1 (10 Punkte). (Going between) Sei R eine endlich erzeugte K-Algebra mit einem Körper K. Sei $R \subset R'$ eine ganze Ringerweiterung. Seien $p_1 \subsetneq p_3$ Primideale in R und $q_1 \subsetneq q_3$ Primideale in R' mit $q_1 \cap R = p_1$ und $q_3 \cap R = p_3$.

(i) Zeigen Sie: Ist p_2 ein Primideal in R mit $p_1 \subsetneq p_2 \subsetneq p_3$, so gibt es ein Primideal q_2 in R' mit $q_1 \subsetneq q_2 \subsetneq q_3$.

(ii) Kann man immer q_2 finden, so dass zusätzlich $q_2 \cap R = p_2$ gilt?

Aufgabe 2 (10 Punkte). (Noether Normalisierung über einem unendlichen Körper) In der Vorlesung haben wir gezeigt, dass nach der Substitution

$$\begin{aligned} &Y_1 = X_1 - X_n^{r_1}, \\ &Y_2 = X_2 - X_n^{r_2} \\ &\dots \\ &Y_n = X_n \end{aligned}$$

jedes Polynom $p \in K[X_1, \dots, X_n]$ (K ein Körper) für bestimmte r_i in der Form

$$cX_n^m + h_1(Y_1, \dots, Y_{n-1})X_n^{m-1} + \dots + h_m(Y_1, \dots, Y_{n-1}), \quad c \in K^*$$

geschrieben werden kann. Zeigen Sie, dass über einem Körper K mit unendlich vielen Elementen schon die lineare Variablensubstitution

$$\begin{aligned} &Y_1 = X_1 - r_1 X_n, \\ &Y_2 = X_2 - r_2 X_n \\ &\dots \\ &Y_n = X_n \end{aligned}$$

jedes nicht verschwindende Polynom $p \in K[X_1, \dots, X_n]$ nach geeigneter Wahl der r_i in die Form

$$cX_n^m + h_1(Y_1, \dots, Y_{n-1})X_n^{m-1} + \dots + h_m(Y_1, \dots, Y_{n-1}), \quad c \in K^*$$

üeberführt.

Aufgabe 3 (10 Punkte). (Explizite Noether Normalisierung)

(i) Sei K ein Körper. Nach der Noether Normalisierung kann man für jede endlich erzeugte K-Algebra A algebraisch unabhängige Elemente $a_1, \dots, a_n$ finden, so dass A ganz über $K[a_1, \dots, a_n]$ ist. Finden Sie solche Elemente für die K-Algebra $A = K[X_1, X_2, X_3]/(X_1 X_2)$.

(ii) Zeigen Sie, dass die Aussage der Noether Normalisierung nicht üeber $\mathbb{Z}$ gelten kann, indem Sie das Beispiel der $\mathbb{Z}$-Algebra $A = \mathbb{Z}[X_1, X_2]/(2X_1X_2 - 1)$ betrachten.

Aufgabe 4 (10 Punkte). (Hilbertscher Nullstellensatz) Sei k ein Körper und K ein algebraischer Abschluß von k. Seien $f, f_1, \ldots, f_r \in k[X_1, \ldots, X_n]$. Wir nehmen an, dass jede simultane Nullstelle $a \in K^n$ der f_i

$$f_1(a) = f_2(a) = \ldots = f_r(a) = 0$$

auch eine Nullstelle von f ist. Zeigen Sie, dass dann Polynome $g_1, \ldots, g_r \in k[X_1, \ldots, X_n]$ und ein $N \in \mathbb{N}$ existieren mit

$$f^N = g_1 f_1 + g_2 f_2 + \ldots g_r f_r.$$

Abgabe: Donnerstag, 16.05.2019, um 14 Uhr vor der Vorlesung.