Übungen zur Vorlesung Algebra 1 —Blatt 5—

Aufgabe 1 (10 Punkte). (Ganzer Abschluß und Lokalisierung) Sei $R \subset R'$ eine Ringerweiterung und $\bar{R}$ der ganze Abschluss von R in R' . Sei S eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge von R . Dann ist $S^{-1}\bar{R}$ der ganze Abschluss von $S^{-1}R$ in $S^{-1}R'$.

Aufgabe 2 (15 Punkte). (Geometrische Deutung von Going Down und Going Down) Sei $\varphi : R \subset R'$ eine Ringerweiterung. a) Dann sind äquivalent:

- (i) φ erfüllt Going Up.
- (ii) Für alle Primideale $q \subset R'$ und $p = q \cap R$ ist die Abbildung $\text{Spec}(R'/q) \rightarrow \text{Spec}(R/p)$ surjektiv.
- (iii) $\text{Spec}(\varphi)$ ist abgeschlossen, dh. Bilder abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen.

b) Dann sind äquivalent:

- (i) φ erfüllt Going Down.
- (ii) Für alle Primideale $q \subset R'$ und $p = q \cap R$ ist die Abbildung $\text{Spec}(R'_q) \rightarrow \text{Spec}(R_p)$ surjektiv.

Aufgabe 3 (10 Punkte). (Hilfslemma) Sei $\varphi : R \rightarrow R'$ ein Ringhomomorphismus, $p \in \text{Spec}(R)$. Dann sind äquivalent:

- (i) Es existiert ein Primideal $q \subset R'$ mit $p = \varphi^{-1}(q)$.
- (ii) $\varphi^{-1}((\varphi(p)R')) = p$.

Aufgabe 4 (5 Punkte). (Zahlkörper) Sei $d \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1\}$ quadratfrei. Zeigen Sie, dass der ganze Abschluß $\bar{R}$ von $\mathbb{Z}$ in der quadratischen Körpererweiterung

$$\mathbb{Q}(\sqrt{d}) = \{a + b\sqrt{d} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$$

von $\mathbb{Q}$ gerade

$$\bar{R} = \{a + b\sqrt{d} \mid a, b \in \mathbb{Q}, -2a \in \mathbb{Z}, a^2 - db^2 \in \mathbb{Z}\}$$

ist. Ist das immer gleich $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\sqrt{d}$? Sie müssen $\bar{R}$ nicht explizit ausrechnen.

Die Fachschaft Mathematik feiert am 09.05. ihre Matheparty in der N8schicht. Der VVK findet am Mo. 06.05., Di. 07.05. und Mi 08.05. in der Mensa Poppelsdorf statt. Alle weitere Infos auch auf fsmath.uni-bonn.de

Abgabe: Donnerstag, 09.05.2019, um 14 Uhr vor der Vorlesung.