Thorsten Heidersdorf
Universität Bonn

Sommersemester 2019

Übungen zur Vorlesung Algebra 1
—Blatt 4—

Für $p \in Spec(R)$ sei M_p die Lokalisierung eines R-Moduls M an $S = R \setminus p$.

Aufgabe 1 (5 Punkte). (Lokal-Global für Moduln) Sei M ein R-Modul. Dann sind äquivalent:

(i) $M = 0$.

(ii) Für alle $p \in Spec(R)$ ist $M_p = 0$.

(iii) Für alle maximalen p ist $M_p = 0$.

Aufgabe 2 (10 Punkte). (Lokal-Global für Morphismen) Seien M, N zwei R-Moduln und $f : M \to N$ R-linear. Dann sind äquivalent:

(i) f ist injektiv respektive surjektiv.

(ii) Für alle $p \in Spec(R)$ gilt $f_p : M_p \to N_p$ ist injektiv respektive surjektiv.

(iii) Für alle maximalen p ist $f_p : M_p \to N_p$ ist injektiv respektive surjektiv.

Aufgabe 3 (20 Punkte). (Annulator und Torsion) Für einen R-Modul M sei

$$Ann(M) = \{x \in R \mid xm = 0 \forall m \in M\}$$

der *Annulator* von M. Ist $m \in M$, so schreibe $Ann(m)$ für $Ann(Rm)$, wobei Rm der Untermodul von M ist, der von m aufgespannt wird. Dann heißt $m \in M$ ein *Torsionselement*, wenn $Ann(m) \neq 0$ ist. M heißt *Torsionsmodul* falls $Ann(m) \neq 0$ für alle $m \in M$. M heißt *torsionsfrei* wenn $Ann(m) = 0$ für alle $m \in M$. Die Menge der Torsionselemente wird mit $T(M)$ bezeichnet.

Sei R ein Integritätsbereich. Zeigen Sie:

(i) $T(M)$ ist ein Untermodul von M. Geben Sie ein Beispiel eines Ringes R' (notwendigerweise kein Integritätsbereich) und eines R'-Moduls M, so dass $T(M)$ kein Untermodul von M ist.

(ii) Falls M ein Torsionsmodul ist, so ist jede nichtleere Teilmenge von M R-linear abhängig.

(iii) $M/T(M)$ ist torsionsfrei.

(iv) Sei $f : M \to N$ R-linear. Dann gilt $f(T(M)) \subset T(N)$.

(v) Ist

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M''$$

exakt, so ist die Sequenz

$$0 \longrightarrow T(M') \longrightarrow T(M) \longrightarrow T(M'')$$

exakt.

(vi) Sei $S \subset R$ multiplikativ. Dann gilt $T(S^{-1}M) = S^{-1}(T(M))$.

(vii) Die folgenden Eigenschaften sind äquivalent:

(a) M ist torsionsfrei.
(b) M_p ist torsionsfrei für alle $p \in Spec(R)$.
(c) M_p ist torsionsfrei für alle maximalen p.

Abgabe: Donnerstag, 02.05.2019, um 14 Uhr vor der Vorlesung.