

Übungen zur Vorlesung Algebra 1 —Blatt 3—

Aufgabe 1 (10 Punkte). (Endliche Erzeugtheit) Zeigen Sie:

- (i) Ist $f : M \rightarrow R^n$ eine surjektive R -lineare Abbildung und M endlich erzeugt, so ist $\ker(f)$ endlich erzeugt.
- (ii) Freie Untermoduln von endlich erzeugten Moduln sind endlich erzeugt.
- (iii) Falls ein endlich erzeugter Untermodul N eines Moduls M existiert, so dass M/N endlich erzeugt ist, so ist M endlich erzeugt.

Aufgabe 2 (5 Punkte). (Quotientenkörper) Sei R ein Integritätsbereich, der kein Körper ist. Dann ist der Quotientenkörper $\text{Quot}(R)$ nie endlich erzeugt als R -Modul.

Aufgabe 3 (5 Punkte). (Lokal-Global ?) Sei M ein R -Modul. Falls M_p ein endlich erzeugter R_p -Modul ist fuer alle Primideale p in R , ist dann M ein endlich erzeugter R -Modul?

Aufgabe 4 (10 Punkte). (Exaktheit und Hom) Sei R ein Ring und sei

$$0 \longrightarrow N_1 \longrightarrow N_2 \longrightarrow N_3$$

eine Sequenz von R -Moduln. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

- (i) Obige Sequenz ist exakt.
- (ii) Für alle R -Moduln M ist

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_R(M, N_1) \longrightarrow \text{Hom}_R(M, N_2) \longrightarrow \text{Hom}_R(M, N_3)$$

exakt.

Abgabe: Donnerstag, 25.04.2019, um 14 Uhr vor der Vorlesung.