

Übungen zur Vorlesung Algebra 1 —Blatt 2—

Aufgabe 1 (5 Punkte). (Idempotente und lokale Ringe) Sei $e \in R$ ein idempotentes Element in einem lokalen Ring R . Dann ist $e \in \{0, 1\}$ (und damit insbesondere $\text{Spec } R$ zusammenhängend).

Aufgabe 2 (10 Punkte). (Idempotente) Sei $\varphi : R \rightarrow R'$ ein Ringhomomorphismus und $\text{Idem}(R)$ die Menge der Idempotente von R . Zeigen Sie:

- (i) Der Ringhomomorphismus φ induziert eine Abbildung $\text{Idem}(\varphi) : \text{Idem}(R) \rightarrow \text{Idem}(R')$.
- (ii) Sei $I \subseteq R$ ein Ideal und $q : R \rightarrow R/I$ die Quotientenabbildung. Dann ist $\text{Idem}(q)$ injektiv falls $I \subset \text{Jac}R$.
- (iii) Gilt zusätzlich $I \subset \text{Nil}R$, so ist $\text{Idem}(q)$ bijektiv.

Aufgabe 3 (10 Punkte). (Lokaler Ring an p) Sei R ein Ring und p ein Primideal. Zeigen Sie, dass das Bild von $\text{Spec}(R_p)$ in $\text{Spec}(R)$ der Schnitt aller offenen Umgebungen von p in $\text{Spec}(R)$ ist.

Aufgabe 4 (10 Punkte). (Irreduzibilität) Ein topologischer Raum X heißt irreduzibel falls jede Zerlegung $X = X_1 \cup X_2$ in abgeschlossene Teilmengen X_i impliziert, dass X_1 oder X_2 schon ganz X ist.

- (i) Falls $Z \subset X$ irreduzibel ist und $U \subset X$ eine offene Teilmenge mit $U \cap Z \neq \emptyset$, so ist $\overline{U \cap Z} = Z$.
- (ii) Eine abgeschlossene Teilmenge $Z \subset \text{Spec}R$ (R Ring) ist irreduzibel genau dann wenn $Z = Z(p)$ für ein eindeutig bestimmtes Primideal p .

Aufgabe 5 (10 Punkte). (Dichtheit) Eine Teilmenge $S \subset X$ in einem topologischen Raum X liegt per Definition *dicht*, falls $\overline{S} = X$. Sei $\varphi : R \rightarrow R'$ ein Ringhomomorphismus und $\text{Spec}(\varphi) : \text{Spec}R' \rightarrow \text{Spec}R$ die induzierte Abbildung. Zeigen Sie: Das Bild von $\text{Spec}(\varphi)$ liegt dicht in $\text{Spec}(R)$ genau dann wenn $\ker(\varphi) \subset \text{Nil}(R)$.

Abgabe: Donnerstag, 18.04.2019, um 14 Uhr vor der Vorlesung.