Thorsten Heidersdorf
Universität Bonn

Sommersemester 2019

Übungen zur Vorlesung Algebra 1
—Blatt 12—

Vorbemerkung: Bildet man das Tensorprodukt zweier R-Moduln M, N, macht man die R-Abhängigkeit häufig via $M \otimes_R N$ deutlich. Dieses subscript wird von mir unterdrückt solange klar ist, über welchem Ring man arbeitet.

Aufgabe 1 (15 Punkte). Sei M ein R-Modul und R' eine R-Algebra. Dann wird $R' \otimes M$ zu einem R'-Modul via

$$a'(a \otimes m) = a'a \otimes m$$

für $a' \in R'$ (die Skalarerweiterung von M nach R').

(i) Ist $f : M \to N$ R-linear, so ist

$$id_{R'} \otimes f : R' \otimes M \to R' \otimes N$$

R'-linear.

(ii) Sei M ein R-Modul, N ein R'-Modul (der natürlich auch als R-Modul aufgefasst werden kann). Dann existiert eine eindeutige R'-lineare Abbildung

$$f_{R'} : R' \otimes M \to N$$

mit $f_{R'}(b \otimes x) = bf(x)$.

(iii) Die Abbildung $\varphi : Hom_R(M, N) \to Hom_{R'}(R' \otimes M, N)$, $f \mapsto f_{R'}$, ist R-linear und bijektiv.

(iv) Sei M ein R-Modul, N ein R'-Modul. Zeigen Sie: $N \otimes M$ ist ein R'-Modul via

$$b(\sum y_i \otimes x_i) = \sum by_i \otimes x_i$$

und es gibt einen eindeutigen Isomorphismus

$$N \otimes_R M \to N \otimes_{R'} (R' \otimes_R M)$$

von R-Moduln mit

$$y \otimes x \mapsto y \otimes (1 \otimes x).$$

(v) Sei M ein R-Modul, der eine der folgenden Eigenschaften hat:

(a) frei
(b) endlich erzeugt
(c) endlich präsentiert
(d) flach

Dann hat $R' \otimes M$ diesselbe Eigenschaft. Hierbei heißt M endlich präsentiert, falls es eine Surjektion $R^n \to M$ gibt mit $n \in \mathbb{N}$ und endlich erzeugtem Kern.

Aufgabe 2 (10 Punkte). Sei $S \subset R$ multiplikativ, M ein R-Modul. Dann existiert ein eindeutiger Isomorphismus von $S^{-1}R$-Moduln

$$\varphi : S^{-1}R \otimes M \to S^{-1}M, \frac{a}{s} \otimes x \mapsto \frac{ax}{s}$$

Folgern Sie, dass $S^{-1}R$ ein flacher R-Modul ist.

Aufgabe 3 (5 Punkte). Sei $\mathbb{Z}[\sqrt{5}i] \subset \mathbb{Q}(\sqrt{5}i)$ der Ganzheitsring von $\mathbb{Q}(\sqrt{5}i)$. Zeigen Sie: Das Element 2 kann nicht als Produkt von Primelementen geschrieben werden. Bestimmen Sie die Zerlegung des Hauptideals (2) als (eindeutiges) Produkt von Primidealen.

Aufgabe 4 (10 Punkte). Sei R ein noetherscher Integritätsbereich mit Quotientemkörper K. Für alle gebrochenen Ideale I, J und alle multiplikativen Teilmengen S von R gilt

(i) $S^{-1}(IJ) = S^{-1}I \cdot S^{-1}J$.

(ii) $S^{-1}(I :_K J) = S^{-1}I :_K S^{-1}J$.

Abgabe: Donnerstag, 04.07.2019, um 14 Uhr vor der Vorlesung.