Übungen zur Vorlesung Algebra 1 —Blatt 11—

Blatt 12 wird das letzte reguläre Übungsblatt sein. Es wird zwar noch ein Blatt 13 geben, dieses soll aber lediglich der Wiederholung dienen und wird nicht abgegeben.

Definition: Sei R ein Ring und seien M, N, P drei R -Moduln.

- (i) Eine Abbildung $f : M \times N \rightarrow P$ ist R -bilinear falls $f(-, n) : M \rightarrow P$ und $f(m, -) : N \rightarrow P$ R -linear sind für alle $m \in M, n \in N$.
- (ii) Ein Tensorprodukt von M und N über R ist ein R -Modul T mit einer bilinearen Abbildung $\tau : M \times N \rightarrow T$, so dass folgendes gilt: Für jede bilineare Abbildung $f : M \times N \rightarrow P$ in einen R -Modul P gibt es eine eindeutige lineare Abbildung $\varphi : T \rightarrow P$ mit $f = \varphi \circ \tau$:

$$\begin{array}{ccc} M \times N & \xrightarrow{f} & P \\ \downarrow \tau & \nearrow \exists! \varphi & \\ T & & \end{array}$$

Aufgabe 1 (15 Punkte). (Tensorprodukte) a) Seien $(T_1, \tau_1), (T_2, \tau_2)$ zwei Tensorprodukte von M und N . Zeigen Sie, dass es einen eindeutigen R -Modul Isomorphismus $\varphi : T_1 \rightarrow T_2$ mit $\tau_2 = \varphi \circ \tau_1$ gibt:

$$\begin{array}{ccc} M \times N & \xrightarrow{\tau_2} & T_2 \\ \downarrow \tau_1 & \nearrow \exists! \varphi & \\ T_1 & & \end{array}$$

Deshalb spricht man einfach von *dem* Tensorprodukt $M \otimes N$ von M und N . Das Element $\tau(m, n)$ wird mit $m \otimes n$ bezeichnet.

b) Betrachte den freien R -Modul $R^{M \times N}$ mit Basis $M \times N$. Seine Elemente sind Linearkombinationen $\sum a_i(x_i, y_i)$ mit $a_i \in R, x_i \in M, y_i \in N$. Sei $U \subset R^{M \times N}$ der Untermodul, der von Ausdrücken der Form

$$\begin{aligned} (ax + a'x', y) - a(x, y) - a'(x', y) \\ (x, ay + a'y') - a(x, y) - a'(x', y) \end{aligned}$$

für alle $a, a' \in R, x, x' \in M, y, y' \in N$ erzeugt wird. Definiere T und τ via $T = R^{M \times N} / U$ und

$$\tau : M \times N \rightarrow R^{M \times N} / U, (x, y) \mapsto (x, y) + U.$$

Zeigen Sie, dass das Paar (T, τ) die universelle Eigenschaft des Tensorproduktes erfüllt.

c) Seien $\varphi : M \rightarrow N, \varphi' : M' \rightarrow N'$ zwei R -lineare Abbildungen. Zeigen Sie, dass es eine induzierte R -lineare Abbildung

$$\varphi \otimes \varphi' : M \otimes M' \rightarrow N \otimes N'$$

gibt mit $(\varphi \otimes \varphi')(m \otimes m') = \varphi(m) \otimes \varphi'(m')$.

Aufgabe 2 (10 Punkte). (Tensorprodukte 2) Für alle R -Moduln M, N, P gibt es (von der Basiswahl unabhängige) Isomorphismen

(i) $M \otimes N \cong N \otimes M$.

(ii) $M \otimes R \cong M$.

(iii) $(M \oplus N) \otimes P \cong (M \otimes P) \oplus (N \otimes P)$.

(iv) $M \otimes N \otimes P \cong (M \otimes N) \otimes P \cong M \otimes (N \otimes P)$.

Folgern Sie, dass für freie R -Moduln M und N mit Basen $(x_i)_{i \in I}$ und $(y_j)_{j \in J}$ das Tensorprodukt $M \otimes N$ frei ist mit Basis $(x_i \otimes y_j)_{i \in I, j \in J}$.

Aufgabe 3 (15 Punkte). (Exaktheit und Adjunktion) a) Für alle R -Moduln M, N, P gilt

$$\text{Hom}(M, \text{Hom}(N, P)) \cong \text{Hom}(M \otimes N, P).$$

b) Sei

$$M_1 \xrightarrow{\varphi_1} M_2 \xrightarrow{\varphi_2} M_3 \longrightarrow 0$$

kurz exakt. Für jeden R -Modul N ist dann

$$M_1 \otimes N \xrightarrow{\varphi_1 \otimes \text{id}} M_2 \otimes N \xrightarrow{\varphi_2 \otimes \text{id}} M_3 \otimes N \longrightarrow 0$$

kurz exakt (dh. $- \otimes N$ ist ein rechtsexakter Funktor).

c) Zeigen Sie mit einem Beispiel, dass $- \otimes N$ i.A. nicht linksexakt ist.

d) Ein R -Modul N heißt *flach*, falls $- \otimes N$ exakt ist. Zeigen Sie: Ist N frei, so ist N flach.

Abgabe: Montag, 27.06.2019, um 14 Uhr vor der Vorlesung.