

## Übungen zur Vorlesung Algebra 1 —Blatt 10—

**Aufgabe 1 (10 Punkte).** (Minimale Primideale) Sei  $I$  ein Ideal in einem noetherschen Ring. Die isolierten Primideale von  $I$  sind genau die minimalen Primideale über  $I$ . Insbesondere gibt es in einem noetherschen Ring nur endlich viele minimale Primideale über einem gegebenen Ideal  $I$ .

**Aufgabe 2 (10 Punkte).** (Nur ein Primideal) Für einen Ring sind äquivalent:

- (i)  $R$  hat genau ein Primideal
- (ii) Jedes Element von  $R$  ist eine Einheit oder nilpotent.
- (iii)  $\sqrt{(0)}$  ist maximal.

**Aufgabe 3 (10 Punkte).** (Primär Ideale) Sei  $\varphi : R \rightarrow R'$  ein Ringhomomorphismus zwischen noetherschen Ringen und  $I$  ein  $p$ -primäres Ideal in  $R'$ . Zeigen Sie, dass dann  $\varphi^{-1}(I)$  ein  $\varphi^{-1}(p)$ -primäres Ideal ist. Die Umkehrung gilt, falls  $\varphi$  surjektiv ist.

**Aufgabe 4 (10 Punkte).** (Primärzerlegungen)

- (i) Sei  $k$  ein Körper. Seien  $I = \langle XY, X - YZ \rangle$ ,  $I_1 = \langle X, Z \rangle$ ,  $I_2 = \langle Y^2, X - YZ \rangle$  im Polynomring  $k[X, Y, Z]$ . Zeigen Sie, dass  $I = I_1 \cap I_2$  eine minimale Primärzerlegung ist.
- (ii) Seien  $R, R'$  Integritätsbereiche. Finden Sie eine minimale Primärzerlegung von  $(0)$  in  $R \times R'$ .

**Abgabe: Montag, 17.06.2019, um 16 Uhr vor der Vorlesung.**