Thorsten Heidersdorf
Universität Bonn

Sommersemester 2019

Übungen zur Vorlesung Algebra 1
—Blatt 1—

Erinnerung: Alle Ringe in dieser Vorlesung sind kommutativ mit 1.

Aufgabe 1 (10 Punkte). (Beispiele für Zariskitopologie)

(i) Bestimmen Sie die Punkte von $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$. Welche sind abgeschlossen und welche nicht?

(ii) Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper. Bestimmen Sie die Punkte von $\operatorname{Spec} k[x]$. Welche sind abgeschlossen und welche nicht?

(iii) Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper. Geben Sie ein Beispiel für einen nichtabgeschlossenen Punkt in $\operatorname{Spec} k[x,y]$, dessen Abschluss nicht der ganze Raum $\operatorname{Spec} k[x,y]$ ist.

Aufgabe 2 (10 Punkte). (Quasikompaktheit) Zeigen Sie: *SpecR* ist quasikompakt, dh. jede offene Überdeckung besitzt eine endliche Teilüberdeckung: Falls

$$SpecR = \bigcup_{\lambda_i \in \Lambda} U_{\lambda_i}$$

eine offene Überdeckung ist, so gibt es endliche viele λ_i mit

$$SpecR = \bigcup_{i=1}^{n} U_{\lambda_i}.$$

Aufgabe 3 (10 Punkte). (Idempotente) Sei R ein Ring. Ein Element $e \in R$ heißt *idempotent*, wenn $e^2 = e$. Zeigen Sie:

(i) Ein Ring R ist *zerlegbar*, d.h. $R \cong R_1 \oplus R_2$ für zwei kommutative Ringe R_1, R_2, genau dann wenn R ein idempotentes Element $e \neq 0, 1$ enthält.

(ii) $\operatorname{Spec} R$ mit der Zariskitopologie ist *unzusammenhängend*, d.h. $\operatorname{Spec} R = U$ ist disjunkte Vereinigung zweier nichttrivialer, abgeschlossener Teilmengen, genau dann wenn R ein idempotentes Element $e \neq 0, 1$ enthält.

(Tipp: Benutzen Sie die Identitäten $Z(I) \cap Z(J) = Z(I + J)$ und $Z(I) \cup Z(J) = Z(IJ)$.)

Aufgabe 4 (10 Punkte). (Polynomring) Sei R ein Ring und $R[x]$ der Polynomring in einer Variablen mit Koeffizienten in R. Sei $f = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in R[x]$. Zeigen Sie:

(i) f ist nilpotent genau dann wenn alle a_i nilpotent sind.

(ii) f ist eine Einheit genau dann wenn a_0 eine Einheit ist und alle a_i mit $i > 0$ nilpotent sind.

(iii) f ist Nullteiler genau dann wenn ein $a \in R\backslash\{0\}$ mit $af = 0$ existiert.

(Tipp: Zeigen Sie (i) und (ii) zuerst in dem Fall, dass R ein Integritätsbereich ist und schließen Sie daraus den allgemeineren Fall.)

Abgabe: Donnerstag, 11.04.2019, um 14 Uhr vor der Vorlesung.

Allgemeine Informationen zum Übungsbetrieb:

- Die **Vorlesungswebsite** ist http://www.math.uni-bonn.de/people/thorsten/teaching/comm-alg-ss-19/index.htmpl.
- Die **ersten Übungen** finden am Montag, den 08.04.2019, statt.
- Die **Ausgabe** des neuen Übungsblatts erfolgt jeweils donnerstags. Das neue Blatt wird dann auf die Vorlesungswebsite hochgeladen.
- Die **Abgabe** der Übungsblätter findet jeweils am Donnerstag zwischen 14 Uhr und 14:15 Uhr vor der Vorlesung statt. Gruppenabgaben von bis zu zwei Leuten sind erlaubt.