Übungen zur Vorlesung Algebra 1

Lösungen zu Blatt 8

Aufgabe 1

(i)

Nach Definition können wir $X \subseteq \mathbb{A}^m$ und $Y \subseteq \mathbb{A}^n$ schreiben als

$X = Z(f_1, \ldots, f_i) = \{(x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{A}^m \mid f_1(x_1, \ldots, x_m) = \cdots = f_i(x_1, \ldots, x_m) = 0\}$

und

$Y = Z(g_1, \ldots, g_j) = \{(y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{A}^n \mid g_1(y_1, \ldots, y_n) = \cdots = g_j(y_1, \ldots, y_n) = 0\}$,

wobei $f_1, \ldots, f_i \in k[X_1, \ldots, X_m]$ und $g_1, \ldots, g_j \in k[Y_1, \ldots, Y_n]$. Mithilfe der Inklusionsabbildungen

$$\phi_X \colon k[X_1, \ldots, X_m] \to k[X_1, \ldots, X_m, Y_1, \ldots, Y_n],$$

$$\phi_Y \colon k[Y_1, \ldots, Y_n] \to k[X_1, \ldots, X_m, Y_1, \ldots, Y_n]$$

können wir $f_1, \ldots, f_i, g_1, \ldots, g_j$ mit den Polynomen

$$\phi_X(f_1), \ldots, \phi_X(f_i), \phi_Y(g_1), \ldots, \phi_Y(g_j) \in k[X_1, \ldots, X_m, Y_1, \ldots, Y_n]$$

identifizieren. Nun gilt aber offensichtlich

$$X \times Y = Z\big(\phi_X(f_1), \ldots, \phi_X(f_i), \phi_Y(g_1), \ldots, \phi_Y(g_j)\big) \subseteq \mathbb{A}^{m+n},$$

also ist auch $X \times Y \subseteq \mathbb{A}^{m+n}$ eine affine Varietät.

Betrachte die Abbildungen

$$f \colon \mathbb{A}^m \times \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^{m+n},$$

$$(x_1, \ldots, x_m) \times (y_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n)$$

und

$$g \colon \mathbb{A}^{m+n} \to \mathbb{A}^m \times \mathbb{A}^n,$$

$$(x_1, \ldots, x_{m+n}) \mapsto (x_1, \ldots, x_m) \times (x_{m+1}, \ldots, x_{m+n}).$$

Als Polynomabbildungen sind diese natürlich regulär. Außerdem sieht man leicht, dass $f \circ g = \mathrm{Id}_{\mathbb{A}^{m+n}}$ und dass $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{A}^m \times \mathbb{A}^n}$ ist. Das beweist, dass $\mathbb{A}^{m+n}$ und $\mathbb{A}^m \times \mathbb{A}^n$ isomorph als affine Varietäten sind.

(ii)

Betrachte $X = Y = \mathbb{A}^1$, nach Teilaufgabe (i) ist $X \times Y \cong \mathbb{A}^2$. Somit wissen wir, dass die Diagonale

$$\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1 \mid x - y = 0\} \subseteq \mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1$$

Zariski-abgeschlossen ist. Die Teilaufgabe ist gelöst, wenn wir zeigen können, dass $\mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1 \setminus \Delta =: \Delta^C$ *nicht* offen in der Produkttopologie ist. Jede offene Teilmenge von $\mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1$ in der Produkttopologie kann geschrieben werden als Vereinigung von Mengen $U \times V \subseteq \mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1$, wobei $U \subseteq \mathbb{A}^1$ und $V \subseteq \mathbb{A}^1$ Zariski-offen sind. Darum wollen wir annehmen, dass Zariski-offene $\emptyset \subsetneq U, V \subseteq \mathbb{A}^1$ existieren mit

$$U \times V \subseteq \Delta^C.$$

Natürlich gilt dann notwendigerweise $U, V \subsetneq \mathbb{A}^1$.
Abgesehen von $\emptyset$ und $\mathbb{A}^1$ sind die Zariski-abgeschlossenen Teilmengen von $\mathbb{A}^1$ gerade die endlichen Teilmengen. Daraus folgt, dass sowohl U als auch V alle bis auf endlich viele Elemente aus $\mathbb{A}^1 = k$ enthält. Da k algebraisch abgeschlossen ist, hat k unendliche Kardinalität. Somit finden wir gewiss ein $x \in U \cap V$. Das bedeutet aber $(x, x) \in U \times V \subseteq \Delta^C$, also $(x, x) \notin \Delta$, im Widerspruch zur Definition der Diagonale Δ.

Aufgabe 2

(i)

Wir wollen zeigen, dass $R[[X_1, \dots, X_n]]$ noethersch ist. Da $R[[X_1, \dots, X_n]] \cong R[[X_1, \dots, X_{n-1}]][[X_n]]$, reicht es zu zeigen, dass $R[[X]]$ noethersch ist.

Die wesentliche Idee ist es nun, den Beweis für Hilberts Basissatz entsprechend umzuschreiben.

Sei $\mathfrak{I} \subseteq R[[X]]$ ein beliebiges Ideal. Wir wollen zeigen, dass $\mathfrak{I}$ endlich erzeugt ist. Für $n \geq 0$ definieren wir

$$I_n := \left\{ a_n \;\middle|\; f = \sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i \in \mathfrak{I} \cap X^n R[[X]] \right\} \subseteq R.$$

Da $\mathfrak{I} \cap X^n R[[X]] \subseteq R[[X]]$ ein Ideal ist, gilt dasselbe auch für $I_n \subseteq R$. Weiters haben wir stets $I_n \subseteq I_{n+1}$, weil

$$f = a_n X^n + \ldots \in \mathfrak{I} \cap X^n R[[X]] \Longrightarrow X \cdot f = a_n X^{n+1} + \ldots \in \mathfrak{I} \cap X^{n+1} R[[X]].$$

Da R nach Voraussetzung noethersch ist, sind alle I_n endlich erzeugt, und es gibt $N \geq 0$, sodass $I_n = I_N$ für alle $n \geq N$ ist. Darum können wir für jedes $0 \leq n \leq N$ (endlich viele) Erzeuger $(a_{n,i})_i$ für das Ideal I_n wählen. Nach der Definition von I_n finden wir dann formale Potenzreihen $(g_{n,i})_i \subseteq \mathfrak{I} \cap X^n R[[X]]$ mit

$$g_{n,i} = a_{n,i} X^n + \ldots \in R[[X]].$$

Weiters sind die $(a_{N,i})_i$ auch Erzeuger für I_{N+1}, I_{N+2}, ... Wir können daher

$$g_{n,i} := g_{N,i} \cdot X^{n-N}$$

für alle $n > N$ und i wählen.

Wir wollen zeigen, dass $\mathfrak{I}$ von den $(g_{n,i})_i$ für $0 \leq n \leq N$ erzeugt wird.

Sei daher $f \in \mathfrak{I}$ gegeben. Dann gibt es eine Linearkombination g_0 der $(g_{0,i})_i$ mit Koeffizienten in R, sodass $f - g_0 \in \mathfrak{I} \cap XR[[X]]$ ist. Nun finden wir aber eine Linearkombination g_1 der $(g_{1,i})_i$ mit Koeffizienten in R, sodass $(f-g_0)-g_1 \in \mathfrak{I} \cap X^2R[[X]]$ gilt. Indem wir so fortfahren, finden wir für jedes $k \geq 0$ Linearkombinationen g_n der $(g_{n,i})_i$ mit Koeffizienten in R, wobei $0 \leq n \leq k$, sodass

$$f - g_0 - g_1 - \ldots - g_k \in \mathfrak{I} \cap X^{k+1}R[[X]].$$

Der Trick ist nun, die Summe $g_0 + \ldots + g_k$ zu schreiben als

$$g_0 + \ldots + g_k = \sum_{n=0}^{N} g_n + \sum_{l=N+1}^{k} g_l.$$

Die erste Summe auf der rechten Seite ist nach Definition eine Linearkombination der $(g_{n,i})_i$ für $0 \leq n \leq N$, darum haben wir hier nichts zu tun.
Was die zweite Summe betrifft, bezeichne $b_{l,i} \in R$ für $N+1 \leq l \leq k$ den Koeffizienten von $g_{l,i}$ in g_l. Dann ist

$$\sum_{l=N+1}^{k} g_l = \sum_{l=N+1}^{k} \sum_i b_{l,i} \cdot g_{l,i} = \sum_{l=N+1}^{k} \sum_i b_{l,i} \cdot g_{N,i} \cdot X^{l-N}$$

$$= \sum_i \Big(\sum_{l=N+1}^{k} b_{l,i} X^{l-N} \Big) \cdot g_{N,i}.$$

Nun kann $k \geq 0$ aber beliebig groß gewählt werden. Darum können wir $P_i := \sum_{l=N+1}^{\infty} b_{l,i} X^{l-N} \in R[[X]]$ setzen und erhalten (nach Definition der $g_{n,i}$), dass

$$f - \sum_{n=0}^{N} g_n - \sum_i P_i \cdot g_{N,i} \in \mathfrak{I} \cap X^k R[[X]]$$

für jedes $k \geq 0$ gilt. Da aber

$$\bigcap_{k \geq 0} (\mathfrak{I} \cap X^k R[[X]]) = \mathfrak{I} \cap \bigcap_{k \geq 0} X^k R[[X]] = \mathfrak{I} \cap \{0\} = \{0\},$$

folgt daraus, dass

$$f = \sum_{n=0}^{N} g_n + \sum_i P_i \cdot g_{N,i}.$$

Das beweist, dass $\mathfrak{I}$ von den $(g_{n,i})_i$ für $0 \leq n \leq N$ erzeugt wird.

(ii)

Sei $\mathbb{C}[X_1, X_2, \ldots]$ der Polynomring in abzählbar unendlich vielen Variablen, und sei $R = \mathrm{Quot}(\mathbb{C}[X_1, X_2, \ldots])$ sein Quotientenkörper. Als Körper ist R natürlich noethersch, enthält allerdings den nicht noetherschen Unterring $\mathbb{C}[X_1, X_2, \ldots]$.

Man könnte hier auch auf (iv) oder (v) verweisen:

> $\mathbb{Q}[X]$ ist noethersch (weil Hauptidealring), aber $\mathrm{Int}(\mathbb{Z}) \subseteq \mathbb{Q}[X]$ nicht.
>
> $\overline{\mathbb{Q}}$ ist noethersch (weil Körper), aber der ganze Abschluss von $\mathbb{Z}$ in $\overline{\mathbb{Q}}$ nicht.

(iii)

Bezeichne die endlich erzeugte R–Algebra mit A. Dann existieren $n \geq 0$ und ein Ideal $I \subseteq R[X_1, \ldots, X_n]$, sodass

$$A \cong R[X_1, \ldots, X_n]/I.$$

Wir erinnern uns, dass es eine inklusionserhaltende Bijektion gibt zwischen den Idealen in $R[X_1, \ldots, X_n]/I$ und den Idealen in $R[X_1, \ldots, X_n]$, die I enthalten. Da R noethersch ist, folgt aus Hilberts Basissatz, dass auch $R[X_1, \ldots, X_n]$ noethersch ist. Somit wird jede unendliche aufsteigende Kette von Idealen in $R[X_1, \ldots, X_n]$ stationär. Wegen der inklusionserhaltenden Bijektion gilt das folglich auch für jede unendliche aufsteigende Kette von Idealen in $R[X_1, \ldots, X_n]/I$. Das beweist, dass auch $A \cong R[X_1, \ldots, X_n]/I$ noethersch ist.

(iv)

Wir wollen beweisen, dass der ganze Abschluss S von $\mathbb{Z}$ in $\overline{\mathbb{Q}}$ *nicht* noethersch ist. Dazu konstruieren wir eine aufsteigende Kette

$$I_1 \subseteq I_2 \subseteq I_3 \subseteq \ldots$$

von Idealen in S, die *nicht* stationär wird.

Sei $n \geq 1$ beliebig. Dann ist $2^{1/n} \in S$, da es Nullstelle des Polynoms $X^n - 2 \in \mathbb{Z}[X]$ ist. Andererseits ist $2^{-1/n} \notin S$, und das beweisen wir durch Widerspruch: Wäre nämlich $2^{-1/n} \in S$, dann (da S ein Ring ist) auch $2^{-1} = (2^{-1/n})^n \in S$. Doch das ist ein Widerspruch, da $\mathbb{Z}$ ganz abgeschlossen in $\mathbb{Q}$ ist.

Für beliebiges $n \geq 1$ definieren wir nun

$$I_n := 2^{1/2^n} \cdot S$$

als das von $2^{1/2^n}$ erzeugte Hauptideal. Natürlich gilt $I_n \subseteq I_{n+1}$, weil

$$\left(2^{1/2^{n+1}}\right)^2 = 2^{1/2^n}.$$

Wäre aber $I_n = I_{n+1}$, dann fänden wir $x \in S$, sodass

$$2^{1/2^{n+1}} = x \cdot 2^{1/2^n}.$$

Lösen dieser Gleichung liefert $x = 2^{-1/2^{n+1}}$, im Widerspruch zu $x \in S$.

(v)

Auch dieser Ring ist *nicht* noethersch. Dazu betrachten wir das „prominenteste“ Beispiel für $\mathbb{Z}$–wertige Polynome ($\notin \mathbb{Z}[X]$), nämlich Binomialkoeffizienten

$$\binom{X}{n} := \frac{X \cdot (X-1) \cdots (X-(n-1))}{n!} \in \mathbb{Q}[X].$$

Für $n \geq 1$ sei nun

$$I_n := \Big\langle \binom{X}{1}, \ldots, \binom{X}{n} \Big\rangle.$$

Um zu beweisen, dass die aufsteigende Kette

$$I_1 \subseteq I_2 \subseteq I_3 \subseteq \ldots$$

von Idealen *nicht* stationär wird, reicht es zu zeigen, dass $I_{p-1} \subsetneq I_p$ für jede Primzahl p gilt.
Angenommen wir hätten eine Primzahl p mit $I_{p-1} = I_p$. Dann gäbe es $\mathbb{Z}$–wertige Polynome $f_1, \ldots, f_{p-1} \in \mathbb{Q}[X]$ mit

$$\binom{X}{p} = \sum_{i=1}^{p-1} f_i \cdot \binom{X}{i}.$$

Nun kürzen wir beide Seiten der Gleichung durch X und setzen anschließend $X = p$ ein. Auf der linken Seite erhalten wir

$$\frac{(p-1) \cdot (p-2) \cdots (p-(p-1))}{p!} = \frac{(p-1)!}{p!} = \frac{1}{p},$$

auf der rechten Seite hingegen steht (wegen der $\mathbb{Z}$–wertigkeit der f_i) eine rationale Zahl, deren Nenner $(p-1)!$ teilt. Doch das ist ein Widerspruch, da bekanntlich $p \nmid (p-1)!$ gilt.

Aufgabe 3

Wir wollen in dieser Aufgabe stets annehmen, dass $R \neq 0$ ist. Im Falle $R = 0$ ist nämlich $\mathrm{Spec}(R) = \emptyset$, woraus sich alle Teilaufgaben auf triviale Weise ableiten lassen.

(i)

Betrachte die Menge M aller endlicher Durchschnitte maximaler Ideale in R, oder formeller ausgedrückt,

$$M = \Big\{ \bigcap_{\mathfrak{m} \in A} \mathfrak{m} \;\Big|\; A \subseteq \mathrm{Specm}(R) \text{ endlich} \Big\}.$$

Beachte, dass $M \neq \emptyset$, da jeder kommutative Ring $R \neq 0$ mit 1 mindestens ein maximales Ideal besitzt. Da R artinsch ist, wird außerdem jede unendliche absteigende Kette von Idealen in R stationär. Somit können wir das Lemma von Zorn anwenden, das uns die Existenz eines *minimalen Elements* $\mathfrak{M} \in M$

verspricht (d.h., falls $\mathfrak{M}' \subseteq \mathfrak{M}$ für ein $\mathfrak{M}' \in M$, dann folgt bereits $\mathfrak{M}' = \mathfrak{M}$). Nehmen wir an, dass $\mathfrak{M} = \mathfrak{m}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{m}_k$ für $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_k \in \operatorname{Specm}(R)$ gilt. Da $\mathfrak{M}$ minimal ist, folgt $\mathfrak{m} \cap \mathfrak{M} = \mathfrak{M}$ für jedes $\mathfrak{m} \in \operatorname{Specm}(R)$, also

$$\mathfrak{m} \supseteq \mathfrak{m}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{m}_k.$$

Wegen Aufgabe 7.1(ii) muss nun $\mathfrak{m}_i \subseteq \mathfrak{m}$ für ein $i \in \{1, \ldots, k\}$ gelten, und da $\mathfrak{m}_i$ maximal ist, muss dann bereits $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_i$ sein. Damit ist $\operatorname{Specm}(R) = \{\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_k\}$ endlich.

(ii)

Die zweite Behauptung folgt aus der ersten, da $R/\mathfrak{p}$ ein artinscher Integritätsbereich ist für jedes $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$. (Stichwort: Ideal-Korrespondenz für Quotienten. Siehe auch die Lösung zu 8.2(iii).)

Sei also R ein artinscher Integritätsbereich, und sei $0 \neq x \in R$. Dann wird die unendliche absteigende Kette

$$(x) \supseteq (x^2) \supseteq (x^3) \supseteq \ldots$$

von Idealen stationär, d.h., es existiert $n \geq 1$ mit $(x^n) = (x^{n+1})$. Das bedeutet, wir finden $y \in R$ mit $x^n = x^{n+1}y$. Da R ein Integritätsbereich und $x \neq 0$ ist, können wir durch x^n kürzen und erhalten $1 = xy$, also $x \in R^\times$. Somit ist $R^\times = R \setminus \{0\}$, also ist R ein Körper.

(iii)

Die zweite Behauptung folgt aus der ersten, da stets

$$\prod_{i=1}^{n} \mathfrak{m}_i \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{m}_i$$

gilt.

Betrachten wir die folgenden kurzen exakten Sequenzen von R–Moduln:

$$\begin{gathered}
0 \to \mathfrak{m}_1 \to R \to R/\mathfrak{m}_1 \to 0, \\
0 \to \mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2 \to \mathfrak{m}_1 \to \mathfrak{m}_1/\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2 \to 0, \\
\vdots \\
0 \to \mathfrak{m}_1 \cdots \mathfrak{m}_{n-1} \to \mathfrak{m}_1 \cdots \mathfrak{m}_{n-2} \to \mathfrak{m}_1 \cdots \mathfrak{m}_{n-2}/\mathfrak{m}_1 \cdots \mathfrak{m}_{n-1} \to 0, \\
0 \to 0 = \mathfrak{m}_1 \cdots \mathfrak{m}_n \to \mathfrak{m}_1 \cdots \mathfrak{m}_{n-1} \to \mathfrak{m}_1 \cdots \mathfrak{m}_{n-1}/\mathfrak{m}_1 \cdots \mathfrak{m}_n \to 0.
\end{gathered}$$

Betrachten wir die erste Sequenz, dann sehen wir, dass R genau dann artinsch/noethersch ist, wenn $\mathfrak{m}_1$ und $R/\mathfrak{m}_1$ artinsch/noethersch sind. Ziehen wir nun auch die zweite Sequenz hinzu, dann folgt, dass R genau dann artinsch/noethersch ist, wenn $R/\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{m}_1/\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2$ und $\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2$ artinsch/noethersch sind. Da $\mathfrak{m}_1 \cdots \mathfrak{m}_n = 0$ ohnehin artinsch/noethersch ist, folgt induktiv, dass R genau dann artinsch/noethersch ist, wenn all die Quotienten $R/\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{m}_1/\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2$,

…, $\mathfrak{m}_1 \cdots \mathfrak{m}_{n-1}/\mathfrak{m}_1 \cdots \mathfrak{m}_n$ artinsch/noethersch sind.
Sei nun $1 \le i \le n$ beliebig, dann können wir den R–Modul $\mathfrak{m}_1 \cdots \mathfrak{m}_{i-1}/\mathfrak{m}_1 \cdots \mathfrak{m}_i$ auch als $R/\mathfrak{m}_i$–Vektorraum betrachten, und natürlich ist $\mathfrak{m}_1 \cdots \mathfrak{m}_{i-1}/\mathfrak{m}_1 \cdots \mathfrak{m}_i$ genau dann artinsch/noethersch als R–Modul, wenn es artinsch/noethersch als $R/\mathfrak{m}_i$–Vektorraum ist. Allerdings wissen wir auch aus der Vorlesung, dass *artinsch* und *noethersch* äquivalente Eigenschaften für Vektorräume sind. Damit ist jeder der Quotienten $R/\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{m}_1/\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2, \ldots, \mathfrak{m}_1 \cdots \mathfrak{m}_{n-1}/\mathfrak{m}_1 \cdots \mathfrak{m}_n$ genau dann artinsch, wenn er noethersch ist, und somit R genau dann artinsch, wenn R noethersch ist.

(iv)

Nehmen wir zunächst an, dass R artinsch ist. Dann besagt Teilaufgabe (ii), dass jedes Primideal in R maximal ist. Weiters gilt für jedes $k \ge 1$, dass

$$\prod_{\mathfrak{m} \in \mathrm{Specm}(R)} \mathfrak{m}^k = \Big(\prod_{\mathfrak{m} \in \mathrm{Specm}(R)} \mathfrak{m} \Big)^k \subseteq \Big(\bigcap_{\mathfrak{m} \in \mathrm{Specm}(R)} \mathfrak{m} \Big)^k = \mathrm{Nil}(R)^k.$$

Wenn wir zeigen können, dass $\mathrm{Nil}(R)^k = \{0\}$ für hinreichend großes $k \ge 1$ gilt, dann folgt unsere Behauptung aus Teilaufgabe (iii).
Da R artinsch ist und $\mathrm{Nil}(R) \supseteq \mathrm{Nil}(R)^2 \supseteq \mathrm{Nil}(R)^3 \supseteq \ldots$, finden wir $k \ge 1$, sodass

$$\mathrm{Nil}(R)^k = \mathrm{Nil}(R)^{k+1} =: \mathfrak{I} \subseteq R$$

gilt. Wir wollen annehmen, dass $\mathfrak{I} \neq \{0\}$ ist, und das zu einem Widerspruch führen.
Sei dazu M die Menge aller Ideale $\mathfrak{J} \subseteq R$, die $\mathfrak{J} \cdot \mathfrak{I} \neq \{0\}$ erfüllen. Insbesondere ist also $R \in M \neq \emptyset$. Da R artinsch ist, finden wir nun wieder ein minimales Element $\mathfrak{M} \in M$. Da $\mathfrak{M} \cdot \mathfrak{I} \neq \{0\}$, existiert ein $x \in \mathfrak{M}$ mit $x \cdot \mathfrak{I} \neq \{0\}$. Da $(x) \subseteq \mathfrak{M}$, muss also das minimale Element $\mathfrak{M} = (x)$ ein Hauptideal sein. Analog argumentiert man, dass aus $(x \cdot \mathfrak{I}) \cdot \mathfrak{I} = x \cdot \mathfrak{I}^2 = x \cdot \mathfrak{I} \neq \{0\}$ (also $x \cdot \mathfrak{I} \in M$) und $x \cdot \mathfrak{I} \subseteq (x)$ bereits $x \cdot \mathfrak{I} = (x)$ folgt. Deshalb existiert $y \in \mathfrak{I} \subseteq \mathrm{Nil}(R)$ mit $xy = x$, was zur Folge hat, dass $x = xy = xy^2 = \ldots = xy^n = x \cdot 0 = 0$ (wobei man $n \ge 1$ hinreichend groß wählt) ist. Doch dann ist natürlich $x \cdot \mathfrak{I} = 0 \cdot \mathfrak{I} = \{0\}$, ein Widerspruch zu unserer Wahl von x.

Nehmen wir nun an, dass R noethersch ist, und dass jedes Primideal in R maximal ist. Da (wie üblich)

$$\mathrm{Nil}(R) = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)} \mathfrak{p} = \bigcap_{\substack{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) \\ \text{minimal}}} \mathfrak{p}$$

gilt (wobei *minimal* hier bzgl. '$\subseteq$' gemeint ist), und da jedes Ideal in einem noetherschen Ring eine Primärzerlegung hat, gibt es nur endlich viele minimale Primideale $\mathfrak{p} \subseteq R$, und jedes dieser ist maximal nach Voraussetzung. Wir finden also $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_n \in \mathrm{Specm}(R)$ mit

$$\bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{m}_i = \mathrm{Nil}(R).$$

In anderen Worten, falls $\operatorname{Nil}(R)^k = \{0\}$ für hinreichend großes $k \geq 1$ gilt, dann können wir (wie oben) Teilaufgabe (iii) anwenden und die Behauptung folgt.
Da R noethersch ist, ist $\operatorname{Nil}(R)$ jedenfalls endlich erzeugt, sagen wir $\operatorname{Nil}(R) = \langle x_1, \ldots, x_m \rangle$. Das bedeutet, es existieren natürliche Zahlen $a_1, \ldots, a_m \geq 1$, sodass $x_i^{a_i} = 0$ für alle $1 \leq i \leq m$ gilt. Sei nun $k := 1 + \sum_{i=1}^m (a_i - 1)$, dann wird $\operatorname{Nil}(R)^k$ erzeugt von allen Produkten $x_1^{b_1} \cdots x_m^{b_m}$, wobei $\sum_{i=1}^m b_i = k$. Letztere Gleichheit kann aber nur dann erfüllt sein, wenn $b_i \geq a_i$ für irgendein $1 \leq i \leq m$ ist. Doch dann folgt sofort $x_1^{b_1} \cdots x_m^{b_m} = 0$, und somit ist $\operatorname{Nil}(R)^k = \{0\}$.

Aufgabe 4

Bezeichne mit $\phi\colon R \to A$ den (eindeutigen) R–Algebra-Homomorphismus von R nach A. Auch in dieser Aufgabe wollen wir wieder annehmen, dass $R \neq 0$ und $A \neq 0$ ist, da der andere Fall ohnehin trivial ist. Wir befolgen den Hinweis und nehmen zwei Reduktionen vor:

(i) Wir dürfen annehmen, dass R ein lokaler Ring ist.

Sei $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$ beliebig, dann ist $S := R \setminus \mathfrak{p}$ multiplikativ abgeschlossen, und dasselbe gilt für $T := \phi(S) \subseteq A$. Die universelle Eigenschaft der Lokalisierung liefert daher einen Ringhomomorphismus (genau genommen sogar einen $R_\mathfrak{p}$–Algebra–Homomorphismus)

$$\widehat{\phi}\colon R_\mathfrak{p} = S^{-1}R \to T^{-1}A.$$

Man prüft leicht nach (oder bezieht sich auf die Vorlesung), dass $T^{-1}A$ ganz über $S^{-1}R$ ist. Um zu sehen, dass $T^{-1}A$ auch endlich erzeugt über $S^{-1}R$ ist, schreibt man $A \cong R[X_1, \ldots, X_n]/I$ wie in Aufgabe 8.2(iii). Da Lokalisierung ein exakter Funktor ist, impliziert das $T^{-1}A \cong S^{-1}(R[X_1, \ldots, X_n])/S^{-1}I$. Somit reicht es zu zeigen, dass $S^{-1}(R[X_1, \ldots, X_n]) \cong (S^{-1}R)[X_1, \ldots, X_n]$ gilt. Doch auch das ist leicht zu sehen: Man wendet die universelle Eigenschaft der Lokalisierung auf die kanonische Abbildung $R[X_1, \ldots, X_n] \to (S^{-1}R)[X_1, \ldots, X_n]$ an.
Da $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$, folgt aus der „Einführung in die Algebra“, dass $R_\mathfrak{p}$ ein lokaler Ring ist. Weiters gilt $T^{-1}\mathfrak{P} \neq T^{-1}A$ für jedes $\mathfrak{P} \in \operatorname{Spec}(A)$ mit $\phi^{-1}(\mathfrak{P}) = \mathfrak{p}$ wegen der Primideal-Korrespondenz für Lokalisierung und $\mathfrak{P} \cap T = \emptyset$. Somit „überleben“ alle Primideale in A, die über $\mathfrak{p}$ liegen, die Lokalisierung, weshalb die Reduktion (i) gerechtfertigt ist.

(ii) Wir dürfen annehmen, dass R ein Körper ist.

Sei $\mathfrak{m} \subseteq R$ das eindeutige maximale Ideal. Dann induziert die universelle Eigenschaft des Quotienten einen Ringhomomorphismus

$$\overline{\phi}\colon R/\mathfrak{m} \to A/\phi(\mathfrak{m})A.$$

Da A ganz über R ist, muss auch $A/\mathfrak{m}A$ ganz über $R/\mathfrak{m}$ sein. Ähnlich leicht sieht man, dass $A/\mathfrak{m}A$ eine endlich erzeugte $R/\mathfrak{m}$–Algebra ist. Jedes Primideal $\mathfrak{P} \subseteq A$ mit $\phi^{-1}(\mathfrak{P}) = \mathfrak{m}$ muss natürlich $\phi(\mathfrak{m})$ und somit das Ideal $\phi(\mathfrak{m}) \cdot A$ enthalten, also einem Ideal im Quotient $A/\phi(\mathfrak{m})A$ entsprechen. Damit ist auch die Reduktion (ii) gerechtfertigt.

Wir wollen nun zeigen, dass A ein artinscher Ring ist. Dann folgt unsere Behauptung aus Aufgabe 8.3(i) und 8.3(ii), d.h., aus der Endlichkeit von Spec(A). Da R ein Körper ist, ist R natürlich noethersch. Somit können wir aus Aufgabe 8.2(iii) folgern, dass auch A noethersch ist. Da A ganz über R ist, folgt aber aus der Vorlesung, dass $\dim(A) = \dim(R) = 0$ ist, d.h., dass jedes Primideal in A bereits maximal ist. Deswegen folgt die Behauptung aus Aufgabe 8.3(iv).

Aufgabe 5

(i)

Für $n \geq 1$ beliebig definieren wir abgeschlossene Teilmengen

$$A_n := \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n+1}\right] \subseteq [0,1]$$

und Ideale

$$I_n := \{f \in R \mid f(x) = 0 \text{ für alle } x \in A_n\} \subseteq R.$$

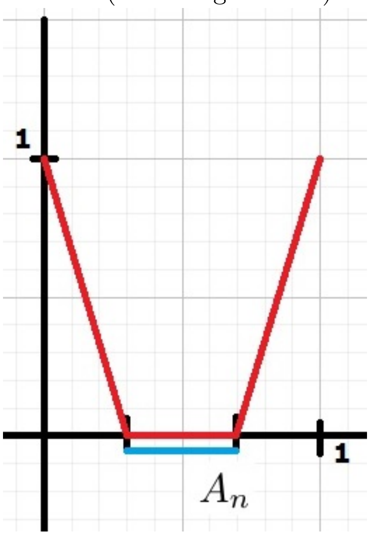
Da offensichtlich

$$A_1 \supsetneq A_2 \supsetneq A_3 \supsetneq \dots,$$

überzeugt man sich leicht, dass

$$I_1 \subsetneq I_2 \subsetneq I_3 \subsetneq \dots .$$

Hier ist etwa ein Beispiel für ein $f \in R$ (rot dargestellt), das in I_n liegt (da f auf dem (blau dargestellten) Intervall A_n verschwindet), nicht aber in I_{n-1}:



Somit haben wir eine aufsteigende Kette von Idealen in R konstruiert, die nicht stationär wird. Das beweist, dass R *nicht* noethersch ist.

(ii)

Für $c \in [0,1]$ betrachte die Abbildung

$$\phi_c\colon R \to \mathbb{R},$$
$$f \mapsto f(c).$$

Zunächst ist ϕ_c ein Ringhomomorphismus, was unmittelbar aus der (punktweisen) Definition von Addition und Multiplikation in R folgt. Weiters ist ϕ_c surjektiv, da für jedes $r \in \mathbb{R}$ die konstante Funktion

$$x \in [0,1] \mapsto r$$

in R liegt und natürlich auf $r \in \mathbb{R}$ abgebildet wird. Offensichtlich ist nun $\ker(\phi_c)$ genau die Menge aller $f \in R$, die in c verschwinden, d.h.,

$$\ker(\phi_c) = M_c.$$

Da $R/M_c \cong \mathbb{R}$ ein Körper ist, folgt bereits, dass $M_c \in \operatorname{Specm}(R)$ ist.

(iii)

Sei nun $\mathfrak{m} \in \operatorname{Specm}(R)$ beliebig und betrachte die Menge

$$V := \{x \in [0,1]\colon f(x) = 0 \text{ für alle } f \in \mathfrak{m}\}.$$

Wir wollen annehmen, dass $V = \emptyset$ ist, und das zu einem Widerspruch führen. Ist das erledigt, dann folgt unsere Behauptung: Gäbe es nämlich stets ein $r \in V$, dann wäre $\mathfrak{m} \subseteq M_r$, also bereits $\mathfrak{m} = M_r$ wegen der Maximalität von $\mathfrak{m}$.

Falls nun $V = \emptyset$, dann finden wir für jedes $x \in [0,1]$ ein $f_x \in \mathfrak{m}$ mit $f_x(x) \neq 0$. Da die $f_x\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ stetige Abbildungen sind, gibt es also für jedes $x \in [0,1]$ eine offene Umgebung

$$x \in U_x \subseteq [0,1],$$

sodass f_x auf U_x nicht verschwindet, d.h., sodass $f_x(y) \neq 0$ für alle $y \in U_x$ ist. Wegen $x \in U_x$ gilt offensichtlich

$$[0,1] = \bigcup_{x \in [0,1]} U_x,$$

also impliziert die Kompaktheit von $[0,1]$, dass es $x_1, \ldots, x_n \in [0,1]$ mit

$$[0,1] = U_{x_1} \cup \ldots \cup U_{x_n}$$

gibt. Betrachte nun das Element

$$f := f_{x_1}^2 + \ldots + f_{x_n}^2 \in \mathfrak{m}.$$

Natürlich ist $f_{x_i}^2 \geq 0$ für jedes $1 \leq i \leq n$ und somit $f \geq 0$. Da

$$[0,1] = U_{x_1} \cup \ldots \cup U_{x_n},$$

gibt es aber andererseits für jedes $x \in [0,1]$ ein $1 \leq i \leq n$ mit $f_{x_i}(x) \neq 0$. Das zeigt, dass $f(x) > 0$ für jedes $x \in [0,1]$ ist, also insbesondere, dass die Abbildung

$$g\colon [0,1] \to \mathbb{R},\ g(x) := f(x)^{-1}$$

wohldefiniert (und $\in R$) ist. Offensichtlich gilt nun $f \cdot g = 1$, d.h., $f \in R^\times$. Doch das ist ein Widerspruch zu $f \in \mathfrak{m}$. Somit muss $V \neq \emptyset$ sein.