Übungen zur Vorlesung Algebra 3

Lösungen zu Blatt 3

Aufgabe 1

(i) *Ist $f : M \to R^n$ eine surjektive R-lineare Abbildung und M endlich erzeugt, so ist* $\ker(f)$ *endlich erzeugt.*

Lösung: Wir zeigen zunächst, dass ein Homomorphismus von R-Moduln $\phi : R^n \to M$ existiert, sodass gilt: $f \circ \phi = \mathrm{id}_{R^n}$. Sei hierfür $e_1, \ldots, e_n$ eine Basis von R^n, so existieren $x_1, \ldots, x_n \in M$ mit $f(x_i) = e_i$ für $i = 1, \ldots, r$. Nach der universellen Eigenschaft freier Moduln existiert nun ein eindeutig bestimmter Homomorphismus von R-Moduln $\phi : R^n \to M$, sodass $\phi(e_i) = x_i$ für $i = 1, \ldots, r$.
Im nächsten Schritt verwenden wir die zuvor konstruierte Abbildung ϕ um zu zeigen, dass die R-lineare Abbildung

$$\psi : \ker(f) \oplus R^n \to M, \quad (x, y) \mapsto x + \phi(y),$$

ein Isomorphismus von R-Moduln ist.
Surjektivität: Sei $x \in M$, dann gilt

$$f(x - \phi(f(x))) = f(x) - f(\phi(f(x))) = f(x) - f(x) = 0.$$

Also liegt $x - \phi(f(x))$ in $\ker(f)$. Folglich gilt

$$\psi(x - \phi(f(x)), f(x)) = x.$$

Injektivität: Seien $(x, y) \in \ker(\psi)$, also $0 = x - \phi(y)$. Somit fogt

$$0 = f(x) - f(\phi(y)) = f(\phi(y)) = y.$$

Hieraus ergibt sich unmittelbar $(x, y) = (0, 0)$, womit die Injektivität von ψ folgt.
Wir zeigen nun, dass $\ker(f)$ endlich erzeugt ist. Hierfür sei $\pi : \ker(f) \oplus R^n \to \ker(f)$ die kanonische Projektion. Dann ist $\pi \circ \psi^{-1} : M \to \ker(f)$ ein surjektiver Homomorphismus von R-Moduln. Da M endlich erzeugt ist, ist damit auch $\ker(f)$ endlich erzeugt.

(ii) *Sei N ein freier Untermodul eines endlich erzeugten R-Moduls M, dann ist auch N endlich erzeugt.*

Lösung: Wir beweisen zunächst folgendes Lemma:

Lemma. *Sei $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl, so ist jede R-lineare Abbildung $f : R^{n+1} \to R^n$ nicht injektiv.*

Beweis. Angenommen es existiert eine R-lineare Abbildung $f : R^{n+1} \to R^n$, dann ist auch die R-lineare Abbildung

$$g : R^{n+1} \xrightarrow{f} R^n \hookrightarrow R^{n+1},$$

injektiv. Wobei obige Inklusion $R^n \hookrightarrow R^{n+1}$ durch $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, \ldots, x_n, 0)$ gegeben ist. Nach dem Satz von Cayley-Hamilton existiert nun ein normiertes Polynom $\phi \in R[X]$, sodass $\phi(g) = 0$. Um dies nun zu einem Widerspruch zu führen, wählen aus der Menge

$$\{\psi \in R[X] | \psi \text{ normiert und } \psi(g) = 0\}$$

ein Polynom $\psi = X^r + a_{r-1}X^r + \ldots + a_0$ mit minimalen Grad. Sei nun $p : R^{n+1} \to R$ die Projektion auf die letzte Koordinate, dann ist nach Konstruktion $p \circ g$ die Nullabbildung. Somit gilt

$$0 = p \circ (\psi(g)) = (p \circ g^r) + a_{r-1}(p \circ g^{r-1}) + \ldots + a_0 = a_0,$$

wobei wir $0, a_0$ als Abbildungen $R^{n+1} \to R$ gegeben durch skalare Multiplikation auffassen. Insbesondere folgt aus $a_0 = 0$, dass ein normiertes Polynom $h \in R[X]$ existiert mit $Xh = \psi$. Es folgt $0 = \psi(g) = \psi(h(g))$ und da ψ injektiv ist erhalten wir $h(g) = 0$. Somit ist h ein normiertes Polynom mit $h(g) = 0$ und $\deg(\psi) = \deg(h) + 1$, dies ist ein Widerspruch zur Wahl von ψ. $\square$

Nehmen wir nun an, dass M von n Elementen erzeugt wird, so existiert eine surjektive R-lineare Abbildung $\pi : R^n \to M$. Wir zeigen nun, dass der Rang von N höchstens n ist. Sei $(x_i)_{i \in I}$ eine R-Basis von N, wähle für jedes $i \in I$ ein beliebiges $x_i \in \pi^{-1}(y_i)$. Durch die Zuordnung $x_i \mapsto y_i$ erhalten wir dann eine R-lineare Abbildung $f : N \to R^n$, sodass $\pi \circ f = \iota$, wobei ι die Inklusion $N \hookrightarrow M$ bezeichnet. Da ι injektiv ist, ist es auch f. Hat aber I höhere Kardinalität als n, so enthält N einen freien Untermodul N' vom Rang $n + 1$. Folglich ist $f_{|N'}$ eine injektive R-lineare Abbildung von einem freien R-Modul von Rang $n + 1$ nach R^n. Nach dem obigen Lemma ist dies unmöglich. Also erhalten wir, dass die Kardinalität von I höchstens n ist.

(iii) *Sei N ein endlich erzeugter Untermodul des R-Moduls M. Angenommen M/N ist ein endlich erzeugter R-Modul, dann ist auch M ein endlich erzeugter R-Modul.*

Lösung: Seien $x_1, \ldots, x_r$ Erzeuger von N und $y_1, \ldots, y_s \in M$, sodass die Restklassen $[y_1], \ldots, [y_s]$ den Modul M/N erzeugen. Wir zeigen, dass die Elemente $x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_s$ den Modul M erzeugen. Hierfür sei $x \in M$ beliebig, dann existieren $\mu_1, \ldots, \mu_s \in R$, sodass

$$x \equiv \sum_{i=1}^{s} \mu_i y_i \mod N.$$

Da N von den Elementen $x_1, \ldots, x_r$ erzeugt wird, existieren $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$, sodass

$$x - \sum_{i=1}^{s} \mu_i y_i = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i.$$

Also ist x eine Linearkombination der Elemente $x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_s$. Folglich ist M endlich erzeugt.

Aufgabe 2

Sei R ein Integritätsbereich, der kein Körper ist. Dann ist der Quotientenkörper $K = \mathrm{Quot}(R)$ nie endlich erzeugt als R-Modul.

Lösung: Angenommen K ist ein endlich erzeugter R-Modul. Da wir angenommen haben, dass R kein Körper ist, existiert ein maximales Ideal $\mathfrak{m} \neq (0)$ in R. Da R ein Integritätsbereich ist haben wir kanonische Inklusionen

$$R \hookrightarrow R_{\mathfrak{m}} \hookrightarrow K.$$

Insbesondere ist das maximale Ideal $\mathfrak{n} = \mathfrak{m}R_{\mathfrak{m}}$ von $R_{\mathfrak{m}}$ ebenfalls nicht das Nullideal in $R_{\mathfrak{m}}$. Da wir angenommen haben, dass K ein endlich erzeugter R-Modul ist folgt, dass K ebenfalls ein endlich erzeugter Modul über dem lokalen Ring $R_{\mathfrak{m}}$ ist. Nun ist $\mathfrak{n}$ nicht das Nullideal, also folgt $\mathfrak{n}K = K$. Da $\mathfrak{n} = \mathrm{Jac}(R_{\mathfrak{m}})$ folgt aus dem Nakayama-Lemma, dass $K = 0$ ist. Dies ist ein Widerspruch, da K ein Körper ist und somit nicht der Nullring seien kann.

Aufgabe 3

Sei M ein R-Modul. Falls $M_{\mathfrak{p}}$ ein endlich erzeugter $R_{\mathfrak{p}}$-Modul für alle Primideale $\mathfrak{p}$ in R, ist dann M ein endlich erzeugter R-Modul.

Lösung: Die Behauptung ist falsch. betrachte den $\mathbb{Z}$-Modul

$$M = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}^{>0} \text{ prim}} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}.$$

Dann ist M als unendliche direkte Summe nicht-trivialer Moduln nicht endlich erzeugt. Allerdings gilt für jede positive Primzahl p und jedes Primideal $\mathfrak{p}$ in $\mathbb{Z}$:

$$(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})_{\mathfrak{p}} = \begin{cases} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} & \text{falls } \mathfrak{p} = (p), \\ 0 & \text{falls } \mathfrak{p} \neq (p). \end{cases}$$

Da Lokalisierung mit direkten Summen kommutiert folgt hiermit $M_{(p)} = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ für jede positive Primzahl p. Außerdem gilt $M_{(0)} = 0$. sSomit ist die Lokalisierung von $M_{\mathfrak{p}}$ für jedes belibiges Primideal $\mathfrak{p}$ in $\mathbb{Z}$ ein endlich erzeugter $\mathbb{Z}_{\mathfrak{p}}$-Modul. Allerdings ist M kein endlich erzeugter Z-Modul.

Aufgabe 4

Sei R ein Ring und

$$0 \to N_1 \xrightarrow{f} N_2 \xrightarrow{g} N_3$$

eine Sequenz von R-Moduln. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:
(i) *Obige Sequenz ist exakt.*

(ii) *Für alle R-Moduln M ist*

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M, N_1) \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}_R(M, N_2) \xrightarrow{g_*} \mathrm{Hom}_R(M, N_3)$$

exakt.

Lösung: Wir zeigen zunächst (i)$\Rightarrow$(ii):
f_* ist injektiv: Sei $h \in \mathrm{Hom}_R(M, N_1)$, sodass $f_* = f \circ h = 0$. Da f injektiv ist folgt unmittelbar, dass h bereits die Nullabbildung sein muss.
$\mathrm{im}(f_*) \subset \ker(g_*)$: Sei $h \in \mathrm{Hom}_R(M, N_1)$ beliebig, dann ist $g_{*(f_{ast}(h))} = g \circ f \circ h$ die Nullabbildung, da $g \circ f$ die Nullabbildung ist.
$\ker(g_*) \subset \mathrm{im}(f_*)$: Sei $h \in \mathrm{Hom}_R(M, N_2)$, sodass $g_*(h) = g \circ h = 0$. Also gilt $\mathrm{im}(h) \subset \ker(g) = \mathrm{im}(f)$. Somit können wir h als einen Homomorphismus $M \to \mathrm{im}(f)$ auffassen. Da f einen Isomorphismus auf sein Bild induziert, ist $u = f^{-1} \circ h : M \to N_1$ ein wohldefinierter Homomorphismus von R-Moduln. Nach Konstruktion gilt $f_*(u) = h$.

Nun beweisen wir (ii)$\Rightarrow$(i):
f ist injektiv: Sei $x \in \ker(f)$. Wir wählen $M = R$ und sei $h \in \mathrm{Hom}_R(M, N_1)$ der eindeutige R-lineare Homomorphismus mit $h(1) = x$. Dann gilt $f_*(h) = f \circ h = 0$. Da f_{ast} injektiv ist, muss h die Nullabbildung sein. Also insbesondere $x = h(1) = 0$.
$\mathrm{im}(f) \subset \ker(g)$: Wir wählen $M = N_1$, so gilt $0 = g_*(f_*(\mathrm{id}_{N_1})) = g \circ f$.
$\ker(g) \subset \mathrm{im}(f)$: Sei $x \in \ker(g)$. Wir wählen $M = R$ und sei $h \in \mathrm{Hom}_R(M, N_2)$ wieder der eindeutige R-lineare Homomorphismus mit $h(1) = x$. Dann gilt nach Konstruktion $g_*(h) = g \circ h = 0$. Insbesondere existiert ein $u \in \mathrm{Hom}_R(M, N_1)$ mit $f_*(u) = f \circ u = h$. Somit gilt $f(u(1)) = h(1) = x$, also $x \in \mathrm{im}(f)$.