Darstellungstheorie
Sommersemester 2009

Prof. Dr. Catharina Stroppel
Dr. Olaf Schnürer

Exercise Sheet 4

Abgabe: Montag 15. Juni 2009

Problem 14. (Eine Erklärung für den Faktor $\frac{1}{12}$...)
Zeigen Sie: $B(\mu, 1)$ ist eine Darstellung der Virasoro Liealgebra mit der in der Vorlesung angegebenen Operation.
Hinweise:

- Zeigen Sie zuerst, daß $[:a_{-j}a_{j+m}:, \tilde{L}_n] = [a_{-j}a_{j+m}, \tilde{L}_n]$ für alle $j, m, n \in \mathbb{Z}$.
- Zeigen Sie: $[a_k, \tilde{L}_n] = ka_{k+n}$.
- Berechnen Sie mit diesen Tatsachen dann $[\tilde{L}_m, \tilde{L}_n]$. Verwenden Sie dabei noch die bekannten Formeln für $\sum_{j=1}^{2} j$ und $\sum_{j=1}^{2} j^2$.

Problem 15. (Empfehlenswert!)

(a) Zeigen Sie: Die auf $M(z, h)$ definierte hermitsche Form ist kovariant, d.h. $\langle xv_1, v_2\rangle = \langle v_1, \omega(x)v_2\rangle$ für alle $x \in Vir, v_1, v_2 \in M(z, h)$, und Gewichtsräume zu verschiedenen Gewichten sind orthogonal.

(b) Betrachten Sie Vermamoduln $M(\lambda)$ für $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$. Definieren Sie ein Analogon der symmetrischen Form auf $M(z, h)$ für $M(\lambda)$. Benutzen Sie die Shapovalovdeterminante, um ein notwendiges und hinreichendes Kriterium zu erhalten wann so ein Vermamodul irreduzibel ist.

Problem 16. Zeigen Sie: $B(\mu, 1)$ ist ein irreduzibler Modul der Heisenberg Liealgebra $\mathcal{H}$ für $\mu \in \mathbb{C}$ beliebig. Können Sie ein μ finden, so daß$B(\mu, 1)$ nicht irreduzibler Modul für die Virasoro ist?

Problem 17. Zeigen Sie: $M(0, h) = L(0, h)$ genau dann wenn $h \neq \frac{1}{24}(m^2 - 1)$ für alle $m \in \mathbb{Z}$.

Problem 18. Zeigen Sie: $V'_{\alpha,\beta}$ ist unitär genau dann wenn $\beta + \overline{\beta} = 1$ und $\alpha + \beta = \overline{\alpha} + \overline{\beta}$. Hinweis: Betrachten Sie $\langle L_{-1}v_k, v_{k-1}\rangle = \langle v_k, L_1v_{k-1}\rangle$ und $\langle L_{-2}v_k, v_{k-2}\rangle = \langle v_k, L_2v_{k-2}\rangle$. Leiten Sie damit zwei Gleichungen her, die die Relation zwischen $\langle v_k, v_k\rangle$ und $\langle v_{k-2}, v_{k-2}\rangle$ beschreiben. Für die Umkehrung sollten Sie eine Biliniearform konstruieren, so daßdie Basisvektoren v_i, $i \in \mathbb{Z}$ eine Orthonormalbasis bilden.