Darstellungstheorie
Sommersemester 2009

Prof. Dr. Catharina Stroppel
Dr. Olaf Schnürer

Exercise Sheet 3

Abgabe: Montag 25. Mai 2009

Problem 9. Zeigen Sie das Polarisationslemma:
Gegeben ein Polynom $f \in \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots x_n]$. Dann ist f eine Linearkombination von Potenzen λ^k, wobei λ ein lineares Polynom ist.

Problem 10. Sei $V = L(\lambda)$ ein irreduzibler $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$-Modul und $\phi : \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$, $x \mapsto (v \mapsto xv)$. Betrachten Sie für $k \in \mathbb{N}$ die Spurfunktion $\Phi_k : x \to \mathrm{Tr}(\phi(x)^k)$. Zeigen Sie:

(a) $\Phi_k \in S(\mathfrak{g}^*)^{\mathfrak{g}}$.
(b) Geben Sie durch eine explizite Formel (abhängig von λ und k) die Einschränkung $\operatorname{res} \Phi_k \in S(\mathfrak{h}^*)$ an und zeigen Sie, daß sie W-invariant ist.
(c) Zeigen Sie (unter Benutzung der obigen Aussagen), daß $\operatorname{res} : S(\mathfrak{g}^*)^{\mathfrak{g}} \to S(\mathfrak{h}^*)^W$ ein Isomorphismus von Algebren ist. (Sie dürfen natürlich nicht den Satz von Chevalley verwenden, wohl aber sich am Beweis dessen orientieren).

Problem 11. Sei $\mathfrak{g}$ eine endlichdimensionale halbeinfache komplexe Liealgebra. Sei x_i, $i \in I$, eine Basis von $\mathfrak{g}$. Sei $(\cdot, \cdot)$ eine nicht-ausgeartete symmetrische assoziative Bilinearform auf $\mathfrak{g}$. Sei x^i, $i \in I$, die duale Basis, also $(x_i, x^j) = \delta_{i,j}$. Betrachten Sie $C := \sum_{i \in I} x_i x^i \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ den sogenannten *Casimir*.

Zeigen Sie:

(a) C ist unabhängig von der Wahl der Basis x_i, $i \in I$.
(b) C liegt im Zentrum $Z(\mathcal{U}(\mathfrak{g}))$ von $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$.
(c) Berechnen Sie die Operation von C auf einem Vermamodul $M(\lambda)$ explizit im Falle $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$. Können Sie eine Formel für allgemeines $\mathfrak{g}$ finden?

Hinweis: Eine Bilinearform ist assoziativ (oder invariant), falls gilt $(x, [y, z]) = ([x, y], z)$ für $x, y, z \in \mathfrak{g}$).

Problem 12. Sei $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$. Sei $\Omega := \sum_{i,j} E_{i,j} E_{j,i}$, wobei $E_{i,j}$ die Matrixeinheit der Form $A = (a_{r,s})_{1 \leq r,s \leq n}$ bezeichnet mit $a_{r,s} = \delta_{r,i}, \delta_{s,j}$. Zeigen Sie, daß Ω alle oben genannten Eigenschaften des Casimirs erfüllt.

Problem 13. Sei $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ und $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ die Unterliealgebra der Diagonalmatrizen. Sei $H_l := E_{l,l}$ (mit $E_{l,l}$ wie in Problem 12). Die Weylgruppe W ist isomorph zu der symmetrischen Gruppe S_n, welche auf $\mathfrak{h}$ durch $\pi(H_l) = H_{\pi(l)}$ operiert.

Zeigen Sie:

(a) $U(\mathfrak{h})^W \cong \mathbb{C}[e_1, e_2, \dots, e_n]$, wobei

$$e_1 = \sum_{i=1}^{n} H_i, \quad e_2 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} H_i H_j, \quad \dots, \quad e_n = H_1 H_2 \cdots H_n$$

(das heißt e_j ist das j-te elementarsymmetrische Polynom).
(b) Zeigen Sie: Die elementarsymmetrischen Polynome sind genau die Koeffizienten des Polynoms $p(x) = \prod_{i=1}^{n} (x - H_i)$.

(c) Wählen Sie eine Basis X_i, $i \in I$ von $\mathfrak{g}$, bestehend aus Wurzelvektoren zusammen mit den H_i's. (Zum Beispiel die Basis von $\mathfrak{g}$ gegeben durch die Matrixeinheiten $E_{i,j}$.) Sei $g_{i,j} := \mathrm{Tr}(X_i X_j)$ und $X^j = \sum_{1 \leq i \leq n} g_{i,j}^{-1} X_i$. Zeigen Sie, daß

$$Z_k := \sum \mathrm{Tr}(X_{i_1} \cdots X_{i_{n-1}} X_{i_n}) X^{i_1} \cdots X^{i_{n-1}} X^{i_n}$$

im Zentrum $Z(\mathcal{U}(\mathfrak{g}))$ von $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ liegt. (Die Summe läuft über alle $1 \leq i_1, i_2, \ldots, i_n \leq n$).

(d) Zeigen Sie, daß

$$\gamma'(Z_k) \equiv \mathrm{Tr}(H_{i_1} \cdots H_{i_{n-1}}) H_{i_n}) H^{i_1} \cdots, H^{i_{n-1}} H^{i_n} \mod U(\mathfrak{g})_{k-1}.$$

Folgern Sie dann, daß dieselbe Formel auch für γ statt γ' gilt.

(e) Berechnen Sie die $g_{i,j}$ explizit.

(f) Verwenden Sie die obigen Aussagen um zu zeigen, daß jedes e_k im Bild von γ liegt (daß also der Harish-Chandra Isomorphismus surjektiv ist). (Kleiner Hinweis: Betrachten Sie das Bild von $Z_k - \sum_{1 \leq i \leq n} H_i$ unter γ.)